第一版序

按照作者的意图，“数学分析簡明教程”是为了我們大学里数学力学系与数学物理系的学生(在某种程度上也适用于师范学院)，作为数学計划中“数学分析”这門課程的基本教材而写的。“数学分析”的内容，包括极限与无穷級数的理論，微分法与积分法的原理以及它們的一些簡单应用。編写这样一本教程是很必要的，因为尽管我們現在已經有了很多的数学分析教程，但是它們当中沒有一个能够完全适合上述的要求。在这些教程中，那些叙述比較簡洁清楚，容易为一般学生所接受的，常常不是已經过时陈旧，就是所依据的科学基础不能滿足数学专門人才的需要；而那些完全建立在近代科学水平上面的教程，其内容又往往是这样繁多，远远超过了現行教学大綱的規定之外，以致一二年級的一般学生沒有条件去理解它們。因此問題就在于要写出这样一个教程，一方面它的材料要严格地限制在每一个念分析的人所必需的教学大綱范圍之内，而同时又要完全建立在近代科学的水平上。

为了使这本教程能够尽可能地簡明，我的方法完全在于选取最精簡的材料，而不在叙述上压縮辞句。課文里面的推理都詳細地写了出来，以减少讀者的困难。特別是我不吝惜說一些話，来帮助讀者时时刻刻都能清楚地了解到他所遵循的道路的規律。至于不同的概念、定理、問題以及整个理論之間的种种关系；它們的作用方法和它們在应用科学与技术上的应用；还有数学分析的另外一些有思想原則性的特色；这一切，在很多場合，都比一般篇幅更多的教程，解释得更加完全和更有系統。我想尽力做到一点，即使得在引进新概念与建立新理論时，学生先有准备，能够尽可能地看出这些新概念、新理論的引进是很自然的，甚至是不可避免的。我认为只有利用这种方法，在学生方面才能对

于所学的东西产生真正的兴趣，才能非形式化地理解与掌握所学到的东西。

对一个有經驗的讀者来說，在本书各章中，最值得談一談的，恐怕是极限理論的讲法(第二、三、四章)，按照現存的傳統习慣，中学里面是用十八世紀的标准把这个理論教給学生的，而在大学的数学分析教程里，却一下子就提高到极限理論的近代讲法，完全用上了 ε 与 δ，并且常常还要在这之前，用整整的一章去討論实数的一般理論。但是无論就其实际內容或者就其格調来說，实数的一般理論都不属于分析而是属于数論与集合論的。这一切就造成了这样的后果：第一，学生們把“大学里面”的极限过程的新概念与他們在中学里所熟悉的极限概念看成絲毫沒有共同的地方。更严重的还是第二点，就是：这种讲法使学生沒有办法学到数学分析基本理論的活潑、能动与辯証的精神，而这种精神正是数学分析在科学史上的特色，而且一直到今天，在实际生活中数学分析的种种应用都是和这种精神紧紧地联系在一起的。这一切就是两种讲法悬殊的严重后果。我在教学时多次观察到这一点，所以在本教程里，对于极限理論的叙述方法不能不采用一个新的体系。这个体系的实质是这样：首先(第二章)把全部极限理論建立在初等的，非彻底形式化的基础上，有系統地利用“过程”以及过程的“时刻”等概念，而这些概念都不是从形式上来定义的。只是到后来指出有形式化的需要时，才給“过程”的基本数学类型下了定义(第三章)。这样做了以后，我就引导学生来注意建立实数的一般理論的必要性，而接着这个理論就建立起来了(第四章)。我已經成功地三次試用这种讲法，它比平常讲法較好的地方是：使学生从“中学的”极限理論到理解“大学的”极限理論的过程不仅是逐步的而且在认識的每一阶段都是有根据的。这种讲法在本书中自始至終使得数学分析的概念生动而有力，而对理論在形式邏輯上的改进，則只給予应得的地位。

至于实数的一般理論，我认为必須具有充分說服力地使讀者領会

到建立這個理論的必要，然後再引進各種可能中的一種產生無理數的原則(單調有界序列的極限)。此後，我僅僅舉出在這個新理論中出現的一些基本問題(連續統的順序，代數運算的定義與法則)以及如何解決這些問題的個別例子。我簡單地指出，這些問題已經由數論完全解決了，然後，我就無限制地利用這些結果。至於數論中究竟怎樣解決這些問題，數學專業的學生儘可以在較專門的課程裏更詳細地學習到這些解法；而對於力學專業、物理專業、天文專業的學生來說，這些問題未必有實際的用處。不管怎樣，我始終認爲，無論是在演講裏或是在一本教程裏，要想用很長的一章無論在內容上或者格調上都與數學分析沒有直接關係的東西，來吸引興趣如是分歧的各種聽講人的注意力，是不可能做到的事情。

以後各章的講法，大致上都是依照某一種已經定型的方式。我很遺憾地說明，在編寫後三章(重積分、線積分與面積分)時，雖然我很想儘可能地寫得既完全嚴格又容易接受，但是我沒有得到成功。我沒有能够避免妥協，就是說我不得不部份地有時放棄了推理的嚴格性，有時放棄了簡潔易懂的原則。假如希望這本教程還能令人滿意的話，無疑地，這些章在再版時還需要加以修改。

在教程中所安插的少數例題，不用說，只有說明的性質，而毫無訓練技巧的意義。這些例子的數量與性質都適合於教師講授之用；我不願把習題課的材料放到我的"簡明教程"裏面來。自然，所有使用本書的人都應該同時採用一本好的習題集。特別是最近出版的 Б. П. 捷米多維奇(國家技術理論書籍出版局，1952)的"數學分析習題集"很合乎這個標準。爲了某種類型讀者的方便起見，我在書中大多數節的後面，特別推荐了上述習題集中的少數習題。不過，我應該提醒讀者，對於必要的技巧訓練來說，這些題目通常還是不够的；領導習題課的教員還應該挑選更多的例題。

高明的讀者不難看出，書中所採用講法的次序決不是不允許變更

的；在很多情況下，可能作一些變更，倒是有好處的，例如，1)微分法的一些幾何應用(第二十三章)講授時可以提前很多(平常實際上就是這樣)；2) 收斂級數的積分判別法也不必一定延遲到廣義積分的理論(第二十五章)之後，而可以提前到同號級數理論(第十八章 § 68)裏面去講。

我非常愉快地向莫斯科、列寧格勒和基輔三個大學的數學教研室的工作同志表示衷心的深切的感謝，他們在閱讀原稿（或者其中若干章)，及提出批評與意見之中所給予的寶貴幫助，無疑地使全書在叙述上大有改進。在這方面特別要感謝Л. А. 涂馬金教授(莫斯科)与Г. Е. 希洛夫教授(基輔)。最後我應該提起權威的和深謀遠慮的本書編輯者О. Н. 哥羅文的巨大工作，他的許多寶貴建議，也在很多方面改進了本書的叙述方法。

阿·辛欽。

莫斯科，一九五三年二月二十四日。

第二版序

本書的第二版是在原有版樣的基礎上僅僅作了一些不大的修改，這些修改或是改正了一些錯誤，或是在個別節內爲了改進叙述的方法。由羅斯托夫大學數學分析教研室(由加霍夫教授領導)寄來的關於本書詳細的評論給了我很大幫助，在這裏我向教研室的所有工作同志表示深切的感謝。還要感謝А. Н. 科尔摩戈洛夫院士及А. М. 滿什金斯教授(明斯克)，他們指出了本書的一些錯誤。

在本教程中很多次推荐給讀者的Б. П. 捷米多維奇"數學分析習題集"在第二版中關於題目的號數有了很大的改變。在本書的這一版中，全部推荐習題的號數還是按照"習題集"的第一版。在書的最後有這些習題按照第二版號數的索引。這個編寫索引的工作是由Б. П. 捷米多維奇進行的，我向他表示深切的感謝。

阿·辛欽。

莫斯科，一九五四年十二月十九日。

上册目录

第一篇　分析引論

第二篇 微分學初步

第三篇 積分學初步

第一篇　分析引論

第一章　函數

§ 1. 變量

笛卡爾的變量是數學的轉折點。就是由於有了變量，才在數學中引進了運動與辯證法……

恩格斯，自然辯證法，國家政治書籍出版局，1948版第208頁。

研究常量的初等數學，至少在大體上是局於形式邏輯的範圍；而研究變量的數學——其中最重要的部份是無窮小量分析——則在本質上不是別的，正是辯證法在數學上的應用。

恩格斯，反杜林論，國家政治書籍出版局，1948版第127頁。

當我們觀察某種自然現象或某種技術過程的運動時，我們往往可以注意到，在這種現象或過程裏面所遇到的種種不同的量，時常會表現出非常不同的狀態。其中有的量，在過程的進行中不起變化，也就是常常說的，保持“常值”。同時，另外一些量，却或多或少地有一些可注意的變化，它們時而變大，時而變小；這也就是常常說的，“取不同的值”。例如，當我們把一個密閉容器內的氣體加熱時，氣體的體積顯然保持常值，氣體分子的個數也保持一定。但相反地，氣體的溫度與壓力這時就要增高，取得越來越大的值。如果我們離開實驗室中的對象，轉而考察某種技術過程，則問題還要複雜得多。例如我們來觀察飛

機的飛行。在這個現象裏，我們會碰到很多不同的量。其中有的量在飛行過程中保持常値；例如乘客的數目，全部行李的重量，兩翼的長度以及很多其他的量。但是在飛行過程中還有更多的量，它們在過程的進行中起着變化，時而變大時而變小，例如，飛機離起飛地點或者目的地的距離，它離地面的高度，汽油的儲存量，溫度，周圍空氣的壓力與濕度以及很多其他的東西。這些例子說明：在這些現象中，無論對於實用的目的而言，或者對於技術與經濟的打算而言，剛好是那些變動的量，有着最重要的意義。這實際上倒是很自然的。自然界的動態是由不停止的變化組成的，而人類的實際行動則是以這種變化的規律爲指導。如果在一種現象或過程中沒有任何變動的東西或者幾乎沒有變動的東西，那末，它在科學上就不能給我們多少啓發，因而也就沒有什麼實用的價値。自然辯證法指示我們在研究自然現象時，需要研究的不是它在某一瞬間的截面，而是這個現象進行的過程本身。在自然科學裏辯證法所提出的問題，不只是現象在某一瞬間的情景是怎樣的，而最重要的，是那種現象整個的進行過程究竟怎樣，以及在這個過程中，究竟是什麼東西在變化，並且它是怎樣變化的。數學這門學問，既然要作爲精確的自然科學與技術上的有效工具，就應該給出一套方法，好讓我們用它來有系統地研究在自然界、在技術過程裏所出現的量的變化情況。

這樣一套方法就是數學分析。按它的更廣泛的意義來講，也可以叫做變動的量的數學理論。

由此可見，數學分析裏面的第一個基本概念應該是變動的量的概念，或者按照數學上所採用的說法，是變量的概念。我們所謂變量就是在某一個過程中可以取不同的(時而大時而小的)値的那一種量。在一個給定的過程中，一般來說，變量在不同時刻就有不同的値。根據日常生活的經驗，我們知道變量的性質與類型是多種多樣的：有些量連續地增大；另一些則剛好相反，連續地減小；第三種類型則又是振動

式的變化，時而增大，時而減小（例如地球與太陽的距離，單擺離鉛直位置的偏度等）；如果已知一個量，比如說，是連續增大的，於是它又可以增大得很快，也可以增大得很慢，還有的時候，它的速度可以時而快、時而慢。系統地研究在我們周圍變化的量的這些特點以及很多其他的特點，從這個包含不同類型的變量的龐大集合裏面整理出秩序來，找出這一類型或另一類型的變量所遵循的共同規律——這一切就是我們廣泛的計劃下，數學分析的任務。

在數學上，對於任何自然現象裏所碰到的一切量，不管是常量還是變量，總是用某一個字母來代表它。因此，例如用 x 或 a 代表某一個量，這時，這個記號本身，一點也沒有表示出這個量是常量還是變量；因此，這個量的變化狀態常常應該特別加以說明。還有很重要的一點必需記住：如果沒有說明我們所討論的是怎樣一種過程，一般說來，我們不能知道到底一個量是常量還是變量。同一個量可能在這一個過程中是常量而在另一過程中却又是變量；例如一個半徑爲 r 的圓沿着一條直線滾動而其半徑不變（第一種過程），則這個圓的面積 πr^2 是一個常量；但如果保持圓心不動而使半徑變大（第二種過程），則圓的面積也就隨之增大，換句話說，它又是一個變量了。

用直線（所謂"數軸"）上的點來表示數，這個大家都知道的幾何表示法，在數學分析裏廣泛地被採用着。在直線上取好原點，記作 O，並取好單位長；於是對於任何一個數 α，我們就都可以用一個點去表示它，這個點與 O 的距離是 $|\alpha|$，[1] 而其方向則由 α 的正負號決定（通常當直線是水平時，正數在 O 的右邊而負數則在左邊）。量 x 的每一個值都是一個數，因而可以用數軸上的一個點來代表它。如果量 x 在某一個過程中保持不變，則它的值在整個過程中始終由數軸上的同一個點來代表。因此我們可以說，常量在數軸上的圖形是一個定點。如果量 x 在已知過程中是變動的，那末它在過程中不同時刻的值就要由數軸上

[1] 記號 $|x|$ 表示 x 的絕對值。

不同的點來代表；代表量 x 的點在過程中就要時常改變其位置；因此我們可以說，變量在數軸上的圖形是一個**動點**。

§2. 函數

在同一個現象中所碰到的種種的量，通常都不是彼此獨立地在那裏變化的；一般說來，它們彼此之間總有或多或少的關係，因而其中一個的變化就常常引起另外那些也跟隨它有相應的變化。例如，圓半徑變大時，其面積也同時變大；密閉在一個容器內的氣體被壓縮（即減小所佔據的體積）時，（在溫度不變的條件下）氣體的壓力也就隨之增大；增加地裏的施肥量，莊稼的收成也隨之增多等等。但是，從這些例子已經可以看出，在某一個現象裏所碰到的各個量之間的關係，就其相互間聯系的明確性來說，可以是很不相同的。在第一個例子裏，這種聯系最明確：只要知道了圓的半徑 r，我們就可以唯一地而且絕對精確地用公式 $s=\pi r^2$ 來確定它的面積。在第二個例子裏，我們已經看到有些不同的情況了；如果知道了氣體的體積 v 以及它的絕對溫度 T，我們當然可以用大家知道的公式

$$p=\frac{cT}{v},$$

來唯一地確定它的壓力 p，其中 c 是一個已知的物理常量；但是這個公式的成立只不過是某種程度（有時甚至很粗糙）的近似；要想作更精確的計算就必須利用更複雜的公式；而這個更複雜的公式表明，真正要精密地確定氣體的壓力，僅僅知道它的體積與溫度是不夠的，還必須考慮很多其他種類的量的值。這種聯系得不精確的情形，在最後一個例中，表現得更突出，雖然施肥的量無疑地會影響到收成的多少，但是同時我們也曉得，即使精確地知道了田地裏面的施肥量，我們也還是不能完全精確地預料到收成的多少的，原因是收成的多少除了和施肥量有關以外，還關係到一系列的其他的因素（例如氣象學上的與農藝學

上的各種不同的因素)。

很自然地,在數學分析裏面,首先要研究的,是變量之間的那種精確關係,換句話說,只要知道了一組變量的值之後,我們就有可能唯一地並且完全精確地決定另外一組變量的值的那種關係。上面提到的公式

$$s=\pi r^2,$$

$$p=\frac{cT}{v},$$

(其中 c 是已知常量)就是這種精確關係的例子。知道了圓的半徑就可以唯一地而且完全精確地決定它的面積 s。如果已知 T 與 v 的值,則由上述第二個公式,也同樣可以唯一而且完全精確地得出量 p 的對應值,在第一個例中量 s 只與一個量 r 有關,對於量 r 的每一個值,都對應着量 s 的一個確定的值,並且量 r 的任何變化都引起量 s 的完全確定的變化。在第二個例中,情形就比較複雜一點:要想知道量 p 的值,僅僅知道 T 的值或者僅僅知道 v 的值都是不够的;量 p 與 T, v 兩個量的值都有關係;如果想要用我們的公式來確定量 p 的值,就必須先同時知道 T, v 兩個量的值;對於一對值 T, v 對應着量 p 的一個確定的值 p,並且量 p 的變化與 T, v 兩個量的變化都有關係。至於 T 與 v 這兩個量本身,則它們的值與它們的變化都是彼此無關而可以隨我們的意思來選定的。在物理上,這就等於說,當氣體的質量給定之後,我們還可以使它有任意的(在已知限度之內)體積 v,與任意的(也在已知限度之內)絕對溫度 T。但是只要 v 與 T 一經選定之後,質量一定的氣體的壓力,就已經不能再隨我們的意思去任意指定,而是唯一地並且完全精確地為我們的公式所確定了(這裏我們當然沒有再考慮那一點,就是這個公式本身對於真正的氣體來說還需要加以修正)。

上面提到的那些例子,顯然都是下述一般講法的特殊情形。在某一個過程中,我們碰到一個量 y,它與這同一個過程中所碰到的其他某些量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 有關,對於量 $x_1, \cdots, x_k$ 的每一組確定的值,都對

應着量 y 的一個唯一確定的值；至於這些量 $x_1, \cdots, x_k$ 本身，則彼此完全無關，換句話說，給定了其中若干個的值，我們還可以任意選定其餘的值（通常是在一個已知範圍內）。量 y 對於量 $x_1, \cdots, x_k$ 的這種相關性叫做**函數關係**，而量 y 本身則稱爲關於量 $x_1, \cdots, x_k$ 的一個**函數**；量 $x_1, \cdots, x_k$ 都叫做**自變量**。因此，在我們上面的例中，量 s 就是關於自變量 r 的一個函數[1]而量 p 是關於兩個自變量 T 與 v 的函數。當然，最簡單的也是最先引起我們注意的情形是 $k=1$ 的情形，也就是說量 y 只是一個自變量 x 的函數的情形。

量 y 是自變量 x 的函數這一事實，我們通常用 $y=f(x)$ 或 $y=\alpha(x)$ 或 $y=A(x)$ 等等形狀的公式來表示，括號前的字母，僅僅表示 y 對於 x 的函數關係的存在性，因而是可以隨意選定的——所表達的意義並不因選擇不同而有所改變。例如圓面積由半徑唯一決定這件事實，可以寫成 $s=f(r)$ 或 $s=s(r)$ 或 $s=A(r)$ 等等。仿此，量 y 是若干個自變量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的函數這件事實也可以用形如 $y=f(x_1, \cdots, x_k)$ 或 $y=y(x_1, \cdots, x_k)$ 或 $y=F(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 等等的公式來表示。例如質量一定的氣體的壓力 p 是唯一地由它的體積與絕對溫度的值所確定的，這件事實，就可以寫成 $p=f(v, T)$ 或 $p=p(v, T)$ 或 $p=F(v, T)$ 等等。因此，選來表示函數關係的字母一點也沒有告訴我們這種相關的性質；$y=f(x)$ 這個式子在不同情形下既可以代表 $y=3x^2$，也可以代表 $y=\lg x$，也可以代表 $y=\sin x$ 等等，重要的只是爲避免混亂計，在同一個論證過程中，不要用同一個字母來作爲不同的函數關係的符號，例如在某種過程中 $y=x^2$ 而 $z=x^3$ 就決不允許寫 $y=f(x)$，同時又寫 $z=$ $=f(x)$。

相反地，同一個字母有時候倒可以同時代表一個量，又代表這個量關於另一個量的函數關係［如前面例中的 $s=s(r)$ 與 $y=y(x_1, \cdots, x_k)$］

[1] 有時我們不說“關於一個（或兩個三個等等）變量的函數”，而簡單地說“一個（或兩個三個等等）變量的函數”。

研究自然現象與技術過程的辯證方法告訴我們，對於一個過程中出現的變動着的量，不能够分裂地彼此孤立地來研究它們，而要研究它們之間的相互關係，那種在實際上連繫着它們的相互關係。這種實際的量與量間的相互關係的數學表現，在最簡單的情形，就是函數關係的概念。因此這就很清楚了，如果說數學分析的第一個基本概念，像我們在§1 中所看到的，是變量的概念，那末在變量理論的進一步發展中，第二個基本概念很自然地就是函數概念。不僅如此，無論出於科學理論上的考慮，還是出於實踐要求上的考慮，我們都有必要經常來研究變量、以及變量之間的相互關係；這就使得函數成了數學分析的研究的中心對象，因此我們完全有理由這樣說，數學分析就是函數的一般理論。

§ 3. 函數的定義區域

我們上面說過，如果給出量 x 的值就可以唯一地確定量 y 的值，量 y 就稱爲量 x 的一個函數。但是在這個定義中，並不要求對於量 x 的任何一個值，都可以確定量 y 的值。在許多情形，我們究竟應該考慮量 x 的那些個值，要根據量 x 與 y 的實際意義，根據我們所考慮問題的內容來確定。例如假定 y 代表內接於半徑爲 1 的圓的正 x 角形的面積，顯然 y 是 x 的一個函數；但是由於這些量的意義，我們需要研究的量 x 的值只是一些整數 3,4,5,…。仿此，$n!$ 是 n 的一個函數，它只在 n 是正整數時才有意義。函數 $y=\lg x$ 通常也只對於 x 的正數值才能確定。如果把一個物體的絕對溫度 T 當作自變量，用攝氏度數表示它，則我們所要討論的任何問題中都不會需要研究比 -273 更小的 T 的值。相反地，純粹數學地給出的函數 $y=x^3$ 或 $y=\sin x$ 則對於量 x 的任意一個值，都可以完全合理地確定它們的值，我們碰到很多這種問題，要解決它們，實際上必須對於量 x 的任意值，都能確定這個函數的值。

上述這些例子已經够清楚地說明了，自變量 x 的那些個值，能够合理地確定出函數 y 的對應值的那些個值，所組成的集合，完全要由我們

當前所討論的問題來決定。我們有時候根據實際的考慮來選定這樣一個集合，也有時候根據純數學的考慮來選定這樣一個集合。不過不管怎麼樣，只要我們研究一個函數 $y=f(x)$，我們就應當搞清楚那些能使函數隨之確定的自變量的值所成的集合 $\mathscr{M}$，並且在可能有一些疑問發生的地方，清楚地把這個集合指出來。對於不在這個集合中的量 x 的值而言，函數 y 就什麼值也沒有，因而可以看作是沒有定義的。也就因此，集合 $\mathscr{M}$ 稱爲已知函數的定義區域。

通過以上的討論，我們就很清楚了，函數概念的精確定義裏面必需要提到這個集合 $\mathscr{M}$：

如果對於量 x 的屬於集合 $\mathscr{M}$ 的每一個值，都對應着量 y 的一個唯一確定的值，我們就說量 y 是量 x 的確定在集合 $\mathscr{M}$ 上的一個函數。

§ 4. 函數與公式

因此，對於不管怎樣定義的函數，在數學上來說，都是要建立一個對應關係，對於某個集合 $\mathscr{M}$ 裏的每一個數 x，對應地確定量 y 的一個值。究竟用什麼樣的方法來建立這種對應關係——這問題，當然就有着很大的實際意義；不過，從原則上來看，其實這還是一個比較次要的技術性的問題。規定函數 $y=f(x)$ 的最方便的方法，當然是在它的定義裏直接指出，要對量 x 施行那些代數運算，以及按照怎樣的次序來施行這些運算，才能得出量 y 的對應值。作爲這種規定方法的典型例子，可以舉出簡單的公式如 $y=3x^2$，$y=\frac{1}{1+x^4}$ 等等，利用這些公式可以很容易地從量 x 的任意值算出量 y 的對應值來；同一類型的規定法，還可以拿公式

$$n!=1\cdot2\cdots n$$

爲例，它對於所有正整數 n 都確定了函數 $n!$ 的值。

但是要用這末簡單的方法來確定函數，並不是永遠可能的；而且卽使可能，在實際上也不會在所有情況下都合用。像 $\lg x$, $\sin x$, $\cos x$ 等

等初等函數，就已經不能從我們寫出的公式直接回答如何從量 x 的已知值來求出與之對應的函數值的問題。比如說，大家都知道，函數 $y=\sin x$ 是用幾何方法定義的，這種方法只能給我們一種信念，就是函數 $\sin x$ 的確存在而且是唯一確定的，但是它一點也沒有直接告訴我們應該怎樣來計算這個函數的值，這個問題應該通過特別的研究去解決，而這個問題的解決，却遠非輕而易舉的事情，這從我們廣泛地使用像 $\sin x$，$\cos x$，$\lg x$ 等等的表這件事上面就可以充分地看出來；事實上，這些表本身正是列舉着從量 x 的不同的值計算出來的這種或那種函數的值。一次付出了大量的勞力，把結果用列表的形式發表出來，為的就是要免除科學家與實際工作者再去不必要地重複那些同樣的計算。

現在來看幾個值得學習的規定函數的例子。

例 1. 假設 y 代表不超過 x 的最大整數；很明顯，量 x 的任意一個值，都唯一地確定量 y 的一個值，換句話說，量 y 是關於 x 的一個函數，這個函數我們通常用符號 $[x]$ 來表示，例如，

$$[2.5]=2,\quad [5]=5,\quad [\pi]=3,\quad [-\pi]=-4$$

等等。函數 $y=[x]$ 在數論以及其他一些數學分支裏面都有很大的用處。我們看到了，這個函數的定義是很簡單的，但是這個定義中並沒有這樣一個公式，它能夠指出應該通過怎樣的一系列的計算從量 x 的已知值來推出量 $y=[x]$ 的對應值。雖然，也許我們還是有可能通過 x 用"公式"來表達函數 $y=[x]$；換句話說，用初等數學中通用的一系列的符號來表達 $y=[x]$；但是這種公式對於我們研究函數 $[x]$ 來說，通常並沒有什麼好處，最自然的還是依據我們的不包含公式的定義來進行這種研究。

量 $x-[x]$ 稱為數 x 的小數部份，它也是 x 的一個函數，在很多數論的問題中它都扮演着重要的角色；顯然，這是一個以 1 為周期的周期函數，而且我們永遠有

$$0\leqslant x-[x]<1.$$

例 2. (“迪里赫勒函數”) 如果數 x 是一個有理數即整數與分數時,我們令 $D(x)=1$,如果數 x 是一個無理數(例 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=\pi$)時,則我們令 $D(x)=0$。這樣定義的函數 $D(x)$,對所有的 x 都是確定的(定義區域是整個數軸)。我們看到,這個函數的定義非常簡單。當給定量 x 的值,要找 $D(x)$ 的值時,只要用任何一種方法來判定 x 是有理數或是無理數就行了;但是怎麼樣來斷定一個數是有理數還是無理數呢?我們沒有辦法給出任何一般性的方案,這個問題的解法要看我們是用什麼方法來給出數 x 的。特別是數學家知道有這種數 x 存在,它可以完全精密地確定出來,但是直到今天爲止,誰也還沒有能够證明它們究竟是有理數還是無理數,換句話說,函數 $D(x)$ 的有一些值直到今天數學家還計算不出來。當然,儘管是這樣,我們用來規定函數 $D(x)$ 的定義仍然是完全有效的。我們也可以把函數 $D(x)$ 用“公式”表出來,換句話說,重複地運用在數學上通用的符號去把它表出來,但是這種公式在實際上幾乎完全沒有用處,這是因爲在大多數情形下,迪里赫勒函數的重要性質都可以從上面“沒有公式”的定義簡單地推出來,而要想藉助公式來證明這些性質,不是完全做不到就是要費很大的氣力。

以上這些例子清楚地說明了公式(分析表達式)在確定函數關係時所起的作用。如果這種公式對於計算與研究而言,是簡單而且合用的,它們就是在函數的研究及其實際運用中的極可寶貴的工具。但是當我們找不到這種公式,或者雖然有這種公式,但是很複雜,看不出什麼來,也沒有什麼啓發性的時候,如果還一定要不顧一切地去硬造出這樣的一個公式來當作研究函數的無價之寶,那就完全沒有根據了;事實上,在很多情形下,“沒有公式”的研究是最簡單而且最有效的。

在很長一個時期中(十八世紀全部與十九世紀初期)函數概念是不可分地與確定它的分析表達式連接在一起的,分析表達式就從研究函數的有用工具變成了壟斷一切的統治者。這種按照其性質說來是形式主義的趨勢(因爲在這裏,形式——分析表達式——把它自己的規律强

加到函數關係的眞正內容上面），在時代的進展中頑强地抗拒着，甚至到了我們今天也還沒有被完全剷除掉，特別是在應用科學方面。在 §3 中所述的含義豐富的，絲毫與外在表達式無關的，函數關係概念的定義，其勝利完成通常歸之於十九世紀中葉，並且與德國數學家迪里赫勒的名字連在一起。其實，在迪里赫勒以前若干年，我們的偉大科學家 Н. И. 羅拔切夫斯基❶就已經非常清楚地極力主張這個定義了。爲了能夠更清楚地看出關於確定函數概念的這種着重形式與另一種着重內容的觀點之間的差別，我們現在再來舉一個例子。

例 3. 令

$$y=f(x)=\begin{cases} -1-x^2 & (x<0), \\ 0 & (x=0), \\ 1+x^2 & (x>0). \end{cases}$$

上式表明，對於 x 的負値，量 y 應該用公式 $y=-1-x^2$ 來計算，對於正値則應該用公式 $y=1+x^2$，而對於 $x=0$ 則有 $y=0$。

從我們定義的觀點來看，我們顯然在這裏得到了一個對於 x 的一切値（定義區域是整個數軸）都確定了的函數。右邊就是這個函數的幾何圖形（圖 1）。

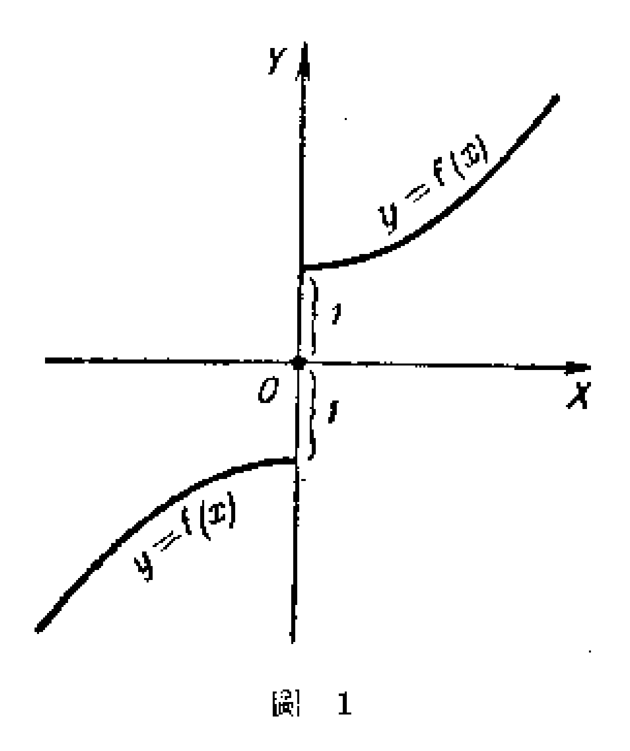


圖　1

量 x 在不同的部份變化時，要用不同的公式來計算我們的函數値；這種情況，從我們的函數定義的觀點看來，並沒有什麼關係，它一點也沒有違背這一事實，即不管數 x 是什麼，都可以依照我們的規定得出量 y 的唯

❶ 更早一些，捷克數學家波耳查諾也有同樣的想法。

一對應值。由此可見我們所得到的是一個確定的函數。形式主義者既然把每一個函數與用來確定函數的分析表達式緊連在一起，就不能不歪曲地說：當量 x 在不同的部份變化時，量 y 表成了"不同的函數"了。

函數理論的全部歷史發展以及這種理論的實際應用都毫無疑問地證明了着重內容的觀點的優越性。它把函數概念，從形式主義者用以力圖使函數屈從於只是用來規定它的表現形式的公式的束縛中，解放了出來。

這種優越性，除去以上這種一般方法論上的考慮之外，還取決於下述事實，即：在自然科學與技術上我們十分經常（特別是在物理、化學、熱力學等等上面）碰到的函數，正是像我們剛才確定的（即當自變量在不同的部份變化時，要用不同的公式去表示的）那種函數。

§ 5. 函數的幾何表示法

函數的幾何表示法（作圖法）的基本原則已經在中學裏面學習過，我們在這裏只對這個問題作一些簡短的說明。

所謂已知函數 $f(x)$ 的圖形，就是直角坐標 x 與 y 滿足關係式 $y=f(x)$ 的那種點的軌跡。如果函數 $f(x)$ 不太複雜，它的圖形通常是平面上一條比較簡單的曲線。對於 x 的（屬於已知函數定義區域的）每一個值總對應着 $y=f(x)$ 的唯一的值，這件事實有它的簡單的幾何意義，那就是每一條與 OY 軸平行的直線都與函數 $f(x)$ 的圖形恰好交於一點。由此可見，不具有這種性質的曲線，一般說來，不能是變量 x 的任何函數的圖形。反之，每一條具有這種性質的曲線顯然都是 x 的某一個函數的圖形，因爲根據函數概念的定義，每一個從 x 到 y 的單值相關性都是一個函數關係。

函數的幾何表示法對於函數的研究具有非常重要的意義，因此它是數學分析以及數學分析的應用的一個非常有用的工具。從函數的圖形上我們往往可以一眼看出函數的某些特性，而這些特性，當我們去研

究函數的分析表達式或者函數的表時，可能只有在花費冗長的計算之後才能够知道。

例如圖 2 指出了，該圖所代表的函數在 a_2a_3 與 a_4a_5 兩部份(隨 x 增大而)遞增，在 a_1a_2，與 a_3a_4 兩部份遞減。如果我們要想知道更詳細的情況，比如說，函數在 a_1a_2 這一部份遞減的詳細情況，這個圖立刻就

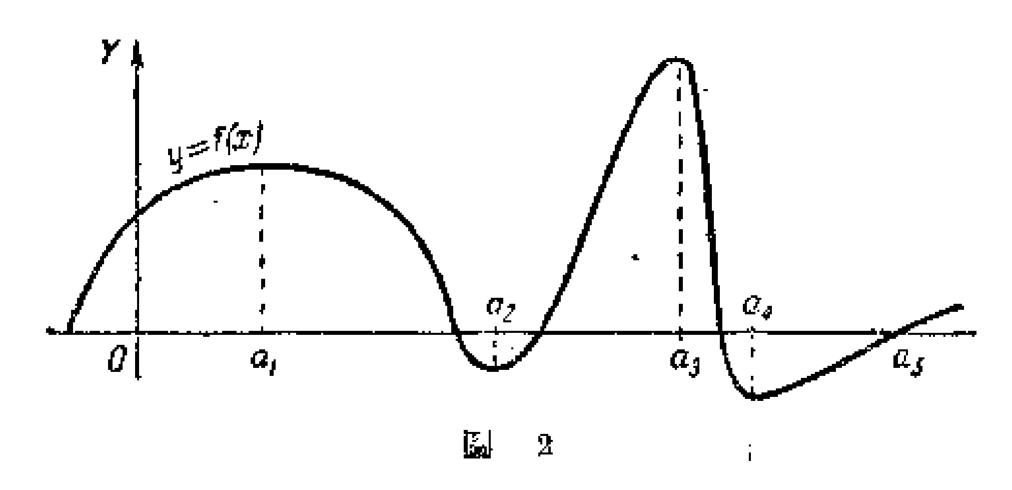


圖 2

告訴我們，開始時(在 $x=a_1$ 附近)減小得較慢，然後就顯著地加快了(陡然下降)；顯然，在 a_3a_4 那部份函數減小得更快。同圖又指出，這個函數在 a_2a_3 那部份增大得較快，而在 a_4a_5 那部份則很明顯地要緩慢得多。就我們所討論的部份來說，函數在 $x=a_3$ 那一點取最大的值而在 $x=a_4$ 那一點則取最小的值。我們還可以清楚地看出，在那一部份函數是正的，在那一部份是負的，等等。如果我們不用圖形而用這個函數的表或者它的分析表達式，則要想知道關於它的上述這一切特性，大部份都要困難得多。

藉助於函數的幾何表示法我們建立了分析的研究對象(函數)與幾何的研究對象(曲線)之間的密切關係。這種關係不僅在研究這一個或那一個函數的性質時可以用作直觀的表現方法，而且，反過來，在研究這一個或那一個曲線的幾何性質時，乃至在建立一整系列的幾何命題時，它使得我們可以利用數學分析方法的無盡寶庫。以後，我們會碰到很多這種類型的例子。因此，從函數的幾何表示這個原則出發所建立起來的分析與幾何之間的聯系，對於這兩個數學部門來說，都是有極大

的好處的。

要想鞏固地掌握函數的幾何表示法，必須通過大量的習題演算才行。讀者可以在 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第一章，§ 4 中找到很多有啓發性的例題。至於挑選那些題目來作，應該遵照教師的指導。

§ 6. 初等函數

在科學的歷史發展過程中，有不多的一類函數，在各色各樣的問題裏面，都特别經常地碰到它們，因此，這些函數就從大量的各種各樣的函數中被挑選了出來，而首先加以特别仔細的研究，這不多的一類函數就是所謂**初等函數**。雖然分析的進一步發展把一系列其他更複雜的函數引進到理論裏面來，而且這些更複雜的函數也同樣需要仔細的研究，然而畢竟在今天，初等函數本身還是分析的絕大多數具體應用的首要根據；而且就是在其他那些更複雜的函數的研究中，我們照例也還要廣泛地利用這類初等函數的爲大家所熟知的性質。這一類函數，就整個來說就是在中學裏所學習的那些函數的全體，因此我們沒有必要在這裏再來仔細地建立這些初等函數的性質；我們只是把它們枚舉出來，略爲討論一下。至於這些函數的特性的一些更細緻的描繪，則待以後更加以考慮（§ 24）。還要注意，我們很難根據任何帶原則性的特徵，把初等函數的全體從各種類型的函數中區别出來；正像我們在一開始就已經說過的，這不多的一類函數純粹是在科學的發展過程中由歷史揀選出來的，一方面在分析內部作爲研究其他更複雜的函數的自然依據，另一方面又成爲分析的絕大多數具體應用的根基。

1. **多項式** 最簡單最容易研究的一類函數關係就是**多項式**

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 x 是自變量，n 是任意一個自然數，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是常數（多項式的"係數"）。如果已知量 x 的值，要求量 y 的值，我們只消對 x 與那些已知常數施行一連串的技術運算（加法、減法、乘法以及正整數次的

乘方)。反之,把任意一連串這種樣的運算加到 x 與任意的一些常數上面去,其結果就是一個多項式。因此,多項式又稱為有理整函數;——"整"是由於我們所用的運算沒有除法,"有理"是由於其中沒有開方。多項式之所以是最簡單的一種函數關係,就是由於可以用最簡單的算術運算求它的值。就因為這一點,在研究其他更複雜的函數關係時,我們常常設法把它們(雖然是近似地)表成多項式的形狀,關於這一點,我們在以後還要詳細地談得很多。

2. **有理函數**　如果對於 x 與若干任意的常數,在前面說過的算術運算之外,再添上除法,則這些運算的結果就已經是 x 的有理函數(一般來說,不是整函數)了;函數

$$y=\frac{1}{x},\qquad y=\frac{1}{1+x^2},\qquad y=\frac{x^2+1}{x+1}$$

等等都是這種函數的簡單例子。初等代數裏面證明了每一個有理函數都可以表成兩個多項式之商,換句話說,可以寫成:

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)},\tag{1}$$

其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 都是多項式。跟多項式一樣,有理函數也具有這個性質,就是對於自變量 x 的任意值,除了使(1)式內的 $Q(x)=0$ 那些值外,都很容易計算這個有理函數的值。對於使 $Q(x)=0$ 的那些 x 的值,由式(1)給出的有理函數是不確定的。這種 x 的值,根本不屬於像我們在§3裏所確定的函數 y 的"定義區域"。例如,如果 y 是由公式

$$y=\frac{1}{1-x^2}$$

給定的,則它的定義區域是整個數軸但是要除去 $x=1$ 及 $x=-1$ 兩點。

3. **一般冪函數**　所謂冪函數就是函數

$$y=x^\alpha$$

其中 α 是任意一個常數。這種函數的性質與數 α 的算術性質有不可分的關係。如果 α 是一個整數,則 y 是一個有理函數(當 $\alpha\geqslant0$ 時是一個整

有理函數)。如果 α 是一個有理分數 $\alpha=\frac{p}{q}$ (其中 p 與 q 都是整數並且永遠可以假定 $q>0$)，則

$$x^{\alpha}=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^{p}}$$

就是 x 的一個所謂**無理代數函數**(因為這裏對 x 施用的運算中，又加上了開 x 的 q 次方)。這種函數的值已經不像有理函數值那樣能用簡單的計算就求出來。到了數 α 是無理數的情形(例如函數 $y=x^{\sqrt{2}}$ 或 $y=x^{\pi}$ 的情形)，那就更不容易計算了；嚴格地說，我們甚至還不知道應該如何來定義這種函數；關於這個問題在 §§ 17 與 24 還要談到。

由形如 $y=x^{\alpha}$ 的公式給出的函數，它的定義區域也是與數 α 的性質有分不開的關係的。如果 α 是正整數。那末整個數軸就是它的定義區域；但是當 α 是整數並且 $\alpha\leqslant 0$ 時，我們就應該從數軸上除去 $x=0$ 這一點。如果 $\alpha=\frac{1}{q}$ 而 q 又是一個正整數，則當 q 是奇數時對於所有的 x，函數都是確定的，而當 q 是偶數時則只對 $x\geqslant 0$，函數才能確定，當 $\alpha=\frac{p}{q}$ 而 p 與 q 都是整數時，讀者不難自己考慮函數的定義區域是怎樣的。在 α 是無理數的情形，我們在 § 17 就會知道，它的定義區域是半直線 $x>0$。

4. 指數函數　所謂指數函數就是函數

$$y=a^{x},$$

其中 a 是一個正的常數。在 § 17 我們要講到，這種函數的定義區域永遠是整個數軸。以後我們還要學到這種函數的另外一些重要性質，這裏，已知 x 的值(除去 $a=1$ 這個簡單而沒有意思的情形之外)，不能用任何一連串有限個代數運算去求出 y 的值。函數 a^{x} 已經不是**代數函數**而是所謂**超越函數**了❶。

---

❶更精確地說是這樣：如果自變量 x 的函數 $y=f(x)$ 可以對 x 施用有限個代數運算得出來，則在代數裏面已經證明過，一定有這樣一個含兩個未知數的多項式 $P(x,y)$ 存在，使得 $P(x,f(x))=0$ 恆成立(即對於任意的 x 都成立)。這句話的反面是不對的，換句話說，的確有這樣的多項式 P 存在而函數 $f(x)$ 並不能通過 x 用任意有限個代數運算表出來。我們

5. **對數函數**　函數

$$y=\lg_a x,$$

的定義就是指數函數的反函數，其中 a 是不等於 1 的一個正的常數。這句話的意思就是說：由 $y=\lg_a x$ 就可以得到 $x=a^y$。說得更詳細一點，對於任意的一個 $x>0$，都有滿足關係 $a^y=x$ 的唯一的一個數 y 存在；這個數 y 就叫做以 a 爲底時數 x 的對數，並且記作 $\lg_a x$。跟指數函數一樣，對數函數也是超越函數。除去這個函數的很大的理論價値而外，它在計算技術裏也起着極重要的作用；這個作用主要基於這個函數的一個大家熟知的性質：$\lg_a(\alpha\beta)=\lg_a\alpha+\lg_a\beta$。以任何一個正數爲底時，對數函數的定義區域都是半直線 $x>0$。

6. **簡單三角函數**　所謂簡單三角函數就是在中學教科書裏大家所熟悉的三角函數。

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg}x,$$
$$y=\operatorname{ctg}x,\quad y=\sec x,\quad y=\operatorname{cosec}x.$$

這些函數的一個重要性質就是他們的**周期性**：$\operatorname{tg}x$ 與 $\operatorname{ctg}x$ 以 π 爲周期，其餘的函數以 2π 爲周期。函數 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的定義區域是整個數軸；函數 tg 與 $\sec x$ 則要除去下列形式

$$x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

的點，又函數 $\operatorname{ctg}x$ 與 $\operatorname{cosec}x$ 要除去下列形式

$$x=k\pi,$$

的點，其中 k 都代表任意整數。

7. **反三角函數**　一般地說，如果從 $y=\varphi(x)$ 可以得到 $x=f(y)$ 我們就說函數 $\varphi(x)$ 是已知函數 $f(x)$ 的一個反函數。我們已經知道函數 $\lg_a x$ 是函數 a^x 的反函數。在這個情形，反函數是唯一的。然而完全有

規定，如果對於函數 $y=f(x)$ 有多項式 P 存在且具有上述性質時，就說這個函數是一個**代數函數**。因此，代數函數類是一個比能夠用有限個代數運算表出來的函數類還要更加廣泛的函數類。代數函數以外的一切函數都稱爲**超越函數**，a^x、$\lg_a x$（對於任意的 $a>0$，$a\neq1$），$\sin x$，$\cos x$，$\arcsin x$，$\arccos x$ 等等都是超越函數。

這種可能，就是已知的函數可以有不止一個反函數；例如函數 x^2 顯然就至少有兩個反函數 $+\sqrt{x}$ 與 $-\sqrt{x}$，因為從 $y=+\sqrt{x}$ 與 $y=-\sqrt{x}$ 一樣地可以得到 $x=y^2$。我們都知道，每一個簡單三角函數都有無窮多個反函數；這些函數都稱為反三角函數。作為一個例子，我們來考慮正弦函數的反函數族。只要 α 是 -1 與 $+1$ 之間的一個數，就有無窮多個 x 的值滿足 $\sin x=\alpha$；特別在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $+\frac{\pi}{2}$ 之間可以找到這樣的一個值，我們把這個值記作 $\operatorname{arc}\sin\alpha$ 因此，

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{arc}\sin\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \sin(\operatorname{arc}\sin\alpha)=\alpha.$$

很明顯，函數 $\operatorname{arc}\sin x$ 的確是 $\sin x$ 的一個反函數。由於 $\operatorname{arc}\sin\alpha$ 是那些正弦等於 α 的弧中的一個，三角學告訴我們正弦等於 α 的弧的一般形式是

$$(-1)^k\operatorname{arc}\sin\alpha+k\pi,$$

其中 k 是任意一個整數。因此，每一個函數

$$(-1)^k\operatorname{arc}\sin\alpha+k\pi$$

（其中 k 是任意一個整數）都是 $\sin x$ 的反函數。而且所有這些函數的定義區域都是綫段 $-1\leqslant x\leqslant 1$。用相仿的方法可以確定並研究其他簡單三角函數的反函數。

在以上 1—7 各段中，我們已經無遺漏地討論了一切的簡單初等函數。另外的初等函數都可以從簡單初等函數得出來，或者藉助於代數運算 $\left[\text{如 } y=\frac{1}{1+x^n},\ y=2^x(\cos x-2\sin x)\right]$，或者藉助於函數運算的“重複使用” $\left[\text{如 } y=\lg\cos x,\ y=\operatorname{tg}\left(1+2^{x^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$，後者就是先取自變量的某一個函數，再取這一個函數的某一個函數等等。從簡單初等函數出發把這種類型的運算，不拘取出多少個，也不論用什麼次序，施行的結果就組成全部初等函數類。前面已經說過，一整系列的初等函數的性質還要到以後再講。在這裏我們只是把最簡單的初等函數一一枚舉出來，其目的只是預先作一個全面的但是初步的觀察。

第二章　極限理論初步

§ 7. 無窮小量

我們在自然現象或技術過程中所碰到的種種變量，它們變化的方式常常是很不相同的。要是我們對這種種不同的變化狀態，按照它們在實際工作中或者在科學研究中出現的順序，一個一個地來加以研究，這樣對待事物，顯然不是一種科學的態度。作個比方說，正像植物學家並不要把眼前所有的植物標本一個一個地加以研究，而是要首先把材料加以分類，把或多或少彼此相似的歸成一類，爲的是這樣就可以更進一步就整個一類的植物來研究他們的性質；同樣地，數學家也應該設法把一切可能有的各類型的變量分成許多相當大的類，然後才有可能系統地來研究這種大類裏面一切量的公共性質。在這樣做的時候，數學家永遠是從最簡單的對象來着手的，理由是這樣，第一，經驗告訴我們，在某一門科學裏面最簡單的，常常同時也正是在應用上最重要的；第二，在數學上常常有這種事情，就是最簡單的情形研究完畢之後，其它更複雜情形的研究，就能很快而且很容易地化成這些最簡單的情形。例如在代數裏討論方程時，我們總是從最簡單的情形——一元一次方程——開始，這種方程一方面在應用裏碰到的最多，同時，很多其他較複雜的問題都可以最後歸結到一次方程。

數學分析的歷史發展告訴我們，很多變化狀態比較複雜的變量的研究，都可以最後歸結到一種最簡單最重要的變量，所謂無窮小量。這種類型的量，無論是在數學理論中或者是在實際應用上都起着如是之大的作用，以致於到現在我們還常常把整個變量的理論稱爲"無窮小量分析"或"無窮小量計算"。因此，我們很自然地要來首先研究這一類型的變量。

試設想你現在面臨着一個自然現象或技術過程，而在其中出現了某一個變量 x。一般地說，在過程進行之中，x 將時而變大，時而變小。現在我們假定，在這個過程進行到充分長久之後，量 x 按絕對值來說能夠變到並且保持任意的小。讓我們把這個意思弄得更清楚一點。假定我們隨便指定一個任意小的正數，例如說 0.001。於是在我們的過程中，就可以找到這樣一個時刻，在這個時刻以後，我們永遠有 $|x|<0.001$。假如我們認爲這還不够小，而希望 $|x|<0.000001$。那末，通常就還必須把過程進行得更長久一些。但是一定還能找到這樣一個時刻，在這個時刻之後，永遠有 $|x|<0.000001$。一般說來，不管我們怎樣指定這個正的常數 ε，在我們的過程中，或早或晚，總可以找到這樣一個時刻，在這個時刻之後就永遠有 $|x|<\varepsilon$。

如果一個量 x（在一個給定的過程中）的變化恰好正像我們上面所描寫的情形那樣，我們就說這個量 x 是這個給定的過程中的一個無窮小量。因此，我們有了下面的定義：

如果不管正的常數 ε 是怎樣的一個數，在給定的過程中都可以找到這樣一個時刻，在這個時刻以後我們永遠有 $|x|<\varepsilon$，這樣，我們就說變量 x 是（給定的過程中的）一個無窮小量。

例 1. 在一定溫度之下，質量一定的氣體的壓力 p 與其體積 v 成反比，即

$$p=\frac{c}{v}, \tag{1}$$

其中 c 是一個正的常數。如果我們無限制地擴大氣體的體積，它的壓力就會減小；如果過程進行得充分長久，換句話說，如果把氣體的體積弄得充分大，那末根據公式(1)，氣體的壓力就可以變成（並且在氣體繼續膨脹之下還能够保持着）任意地小。這就說明，一定質量的氣體在無限制膨脹這一個過程中，它的壓力是一個無窮小量。

例 2. 按照萬有引力定律，太陽 S 吸引着圍繞着它運行的彗星 K

(圖 3)，所用的力是 $\frac{k}{r^2}$，其中 k 是一個正的常數，而 r 是兩個天體的中心之間的距離。我們假定現在所談到的彗星只一次出現在太陽系範圍之內(雙曲線軌道)，以後就無限制地離開了它，因而在此以後，彗星離太陽的距離 r 就一直地並且無限制地增大。於是很明顯，引力 $\frac{k}{r^2}$ 就要無限制地變小；不管我們指定的正數 ε 是多麼小，只要過程進行得充分長久(即彗星離開太陽的距離充分的大)，這個引力總能變到(並且此後永遠保持)小於 ε。由此可見，在彗星無限制地遠離太陽的過程中，太陽吸引彗星的引力是一個無窮小量。

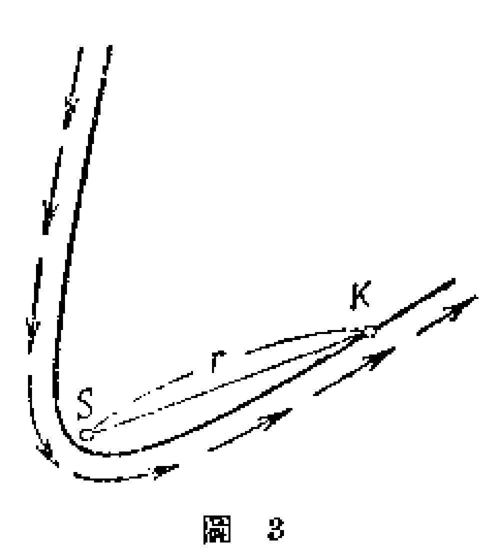


圖 3

例 3. 在遞減的幾何序列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

中，當 n 充分大時，第 n 項就可以是任意地小。換句話說，在數 n 無限增大的過程中，$\frac{1}{2^n}$ 是一個無窮小量。

更一般地說，如果 $0<\alpha<1$，則當數 n 無限增大時，量 $(1-\alpha)^n$ 是一個無窮小量。事實上，從

$$(1-\alpha)(1+\alpha)=1-\alpha^2<1$$

可以得出

$$1-\alpha<\frac{1}{1+\alpha},$$

而這就說明當 $n>0$ 時

$$(1-\alpha)^n<\frac{1}{(1+\alpha)^n};$$

但利用二項式公式展開 $(1+\alpha)^n$，很容易看出 $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$ (也可以用歸納法直接證明)；因此，當 n 充分大時，量 $(1+\alpha)^n$ 可以變成任意地大。而上面的不等式說明，這時，也就是當 n 充分大時，$(1-\alpha)^n$ 就可以

變成任意地小，而這就是我們要證明的。

例 4. 在圖 4 內畫着一個半徑是 1 的圓的一部份，其中

$$AD=DC=|\sin x|, \quad \smile AB=\smile BC=|x|.$$

直線 ADC 比弧 ABC 要短一些，換句話說，$2|\sin x|<2|x|$，亦即 $|\sin x|<|x|$。因此，如果讓角 x 的絕對值一直變小下去，我們就可以使它的正弦的絕對值任意地小。可見，在角的絕對值無限變小的過程中，它的正弦是一個無窮小量。這個例與前一個例不同的地方在於 $\sin x$ 這個量可以是正的也可以是負的；不過這並不妨礙它是一個無窮小量，因為按照無窮小量的定義，這一類型的變量僅僅與量的絕對值有關。

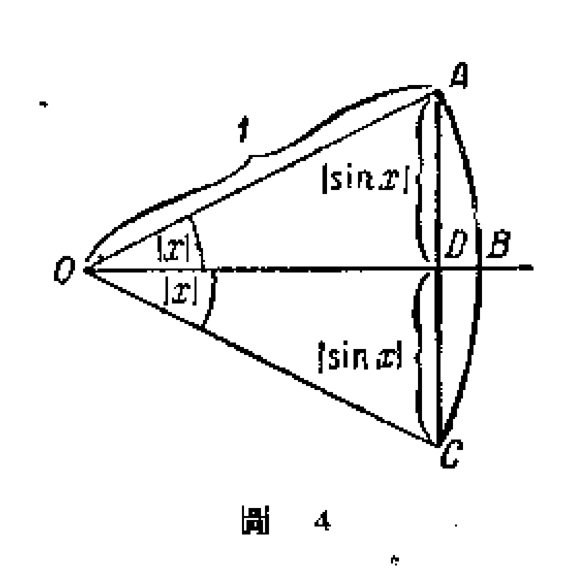


圖 4

例 5. 單擺離開鉛直位置的偏度（圖 5）可以用角 θ 來度量，這個角可以適當地規定當偏到一方面（例如右邊）的時候為正，而偏到另一方面（例如左邊）的時候為負。如果讓單擺自己擺動（不用彈簧或擺錘來給它以動力）則由於機械摩擦力與空氣的阻力，振幅就不斷地減小。在這個過程中，量 θ 一會兒變成正的，一會兒又變成負的，而且在每一次改變符號時，都要通過數值零。角 θ 依賴於時間 t 的函數關係的圖形，就是圖 6 中所畫的那條曲線（漸弱振動曲線）。隨着時間的前進，曲線的波的高度不停地降落下來——這表明振幅的逐漸減小。不管正數 ε 怎樣小，或早或晚總會來到這樣一個時刻，在這個時刻以後就永遠有 $|\theta|<\varepsilon$。由此可見，在這個現象內，角 θ 是一個無窮小量。在這裏我們看到了無窮小量的這樣一種例子，它在變化中交替着取得正的與負的值。

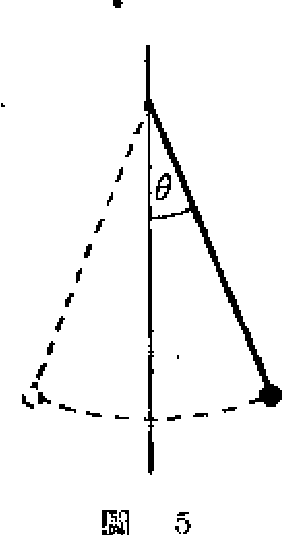


圖 5

如果利用消耗某種能量的方法來維持單擺的振幅使之不變（利用彈簧的放鬆或重錘的下降），則角 θ 依賴於時間的關係就要像圖 7 所表

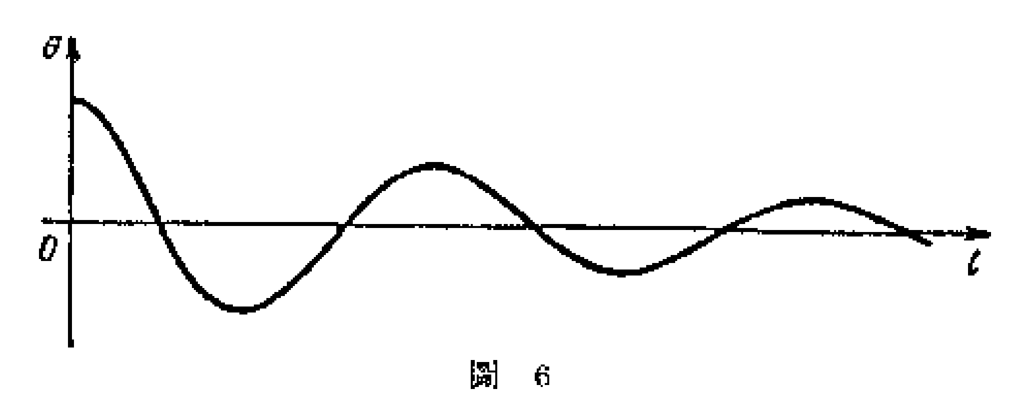


圖 6

示的那種樣子（非漸弱振動曲線）。在這種情形下 θ 就不再是無窮小量了；在時間的進行中，的確有時候 $|\theta|$ 能夠變到任意地小（甚至是零）；但是如果 α 是單擺的（非漸弱的）振幅，就不管我們等待多麼久，永遠也不會有那樣一個時刻，在那個時刻之後，能夠永遠有 $|\theta|<\frac{\alpha}{2}$。

比較以上所舉的這些例子，可以看出，無窮小量可以有很不相同的變化狀態。不過，雖然是這樣，我們以後就會看到，把它們歸納成一類來討論畢竟是非常方便的一種研究方法。

附註　"無窮小量"這個術語，很難用別的東西來代替，從歷史上看來，倒並沒有在任何一種語言中所採用的科學術語裏面引起混亂。但是這個術語其實是令人很不滿意的，特別在教學上，這個名詞本身隱含有被誤解的危險，在這裏有必要特別提醒讀者的注意。"無窮小"這幾個字，聽起來很像是表示所討論的量的大小。特別是初學的人更常

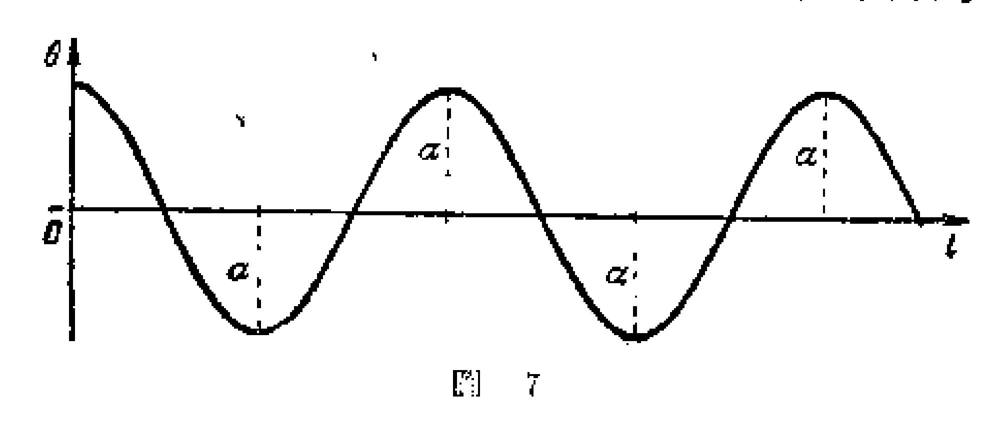


圖 7

常容易把它和"很小"或"可以忽略地小"這些表達量的大小的概念混

在一起，分不清楚。這是不對的；因爲"無窮小"這個術語，按照它本身的定義，並不是表達量的大小，而是表達它的變化的狀態的。自然，假如我們把這一類型的量不叫做"無窮小"量而叫做"無限制變小"的量的話，那是更爲恰當的。

§ 8. 無窮小量的運算

在研究我們這個無時不在變化中的世界時，所以能够廣泛地運用無窮小量，在很大程度上，是由於無窮小量具有這樣的性質：就是把簡單的代數運算施用到無窮小量上去，其結果仍爲無窮小量。現在我們把這些性質歸納成幾條簡單的定理。

定理 1. 一定個數的無窮小量的代數和還是無窮小量。

證明. 假定 $s=x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是無窮小量而 n 是一個定數。我們要證明 s 也是無窮小量。

假定 ε 是任意一個正的常數；於是 $\frac{\varepsilon}{n}$ 也是一個正的常數。因爲 x_1 是無窮小量，所以在我們的過程中，一定可以找到這樣一個時刻，在這個時刻以後，就永遠有

$$|x_1|<\frac{\varepsilon}{n};$$

對於無窮小量 x_2 也是一樣，在過程中也可以找到一個時刻，在這個時刻以後，就永遠有

$$|x_2|<\frac{\varepsilon}{n};$$

對於 $x_3, x_4, \cdots, x_n$ 的每一個也都有同樣的情形。因此 s 的每一項，就絕對值來說，或早或晚到後來都變成永遠小於 $\frac{\varepsilon}{n}$；然而，對於 s 的 n 個不同的項來說，它們開始變成永遠小於 $\frac{\varepsilon}{n}$ 的時刻，一般說來，是各不相同的。不過，好在這些時刻的個數等於項數 n，其中總有一個是最晚的。從這個最晚的時刻開始，所有 n 個不等式

$$|x_1|<\frac{\varepsilon}{n},\quad |x_2|<\frac{\varepsilon}{n},\quad \cdots,\quad |x_n|<\frac{\varepsilon}{n}$$

都永遠成立，因而把它們加起來所得到的不等式

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|<n\cdot\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

也要永遠成立，而由此下式的成立就更不用說了❶：

$$|s|=\left|\sum_{k=1}^{n}\pm x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k|<\varepsilon.$$

這樣，我們就證明了不管正數 ε 怎樣，在過程中總可以找到這樣一個時刻，在這個時刻以後，永遠有 $|s|<\varepsilon$。而這正是說明量 s 是一個無窮小量，因而定理 I 已經證明了。

要進一步建立其餘的定理，我們必須再引進一個新的概念，一般說來，這個概念在以後要起很大的作用。假定在某一個過程中我們碰到一個量 y，如果有這樣一個正的常數 C，又在我們的過程中可以找到這樣一個時刻，在這個時刻以後永遠有 $|y|<C$，則我們就說量 y（在這個過程中）是**有界的**。這個定義的本身很像無窮小量的定義，但是也有本質上不同的地方：在過程的進行中，無窮小量應該變成並且保持（按絕對值來說）小於**任意**的正數，而有界量則只要求小於**某一個**正數。由此當然可以推出：**一切無窮小量都是有界量**。但是反過來說就可能不對。例如隨時間的進行而改變的地球（或者任何其他的行星）離開太陽的距離顯然是一個有界量，但它不是一個無窮小量。另外一個例：當數

❶ 今後我們採用數學上通用的對於求和的縮寫法：

$$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n=\sum_{k=m}^{n}a_k,$$

其中 m 與 n $(m<n)$ 是任意整數，a_k $(m\leqslant k\leqslant n)$ 是任意的數。例如

$$\sum_{k=3}^{8}\frac{1}{k^2}$$

表示和

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}.$$

又本書中不等式的根據是初等代數裏的著名法則：**代數和的絕對值不超過各項絕對值的代數和**。

x 無限增大時，$\sin x$ 是有界的(因為永遠有 $|\sin x|<2$)，但它不是無窮小量(因為不管 x 多末大，我們總是一次又一次地有 $|\sin x|=1$)。因此，有界量應該認為是一個比無窮小量更一般(或更廣泛)的概念。

定理 2. 有界量與無窮小量的乘積還是無窮小量。

證明. 假定在某一個過程中量 x 是一個無窮小量而量 y 是一個有界量，又 ε 是任意一個正的常數。由於量 y 的有界性，可以找到這樣一個正數 C，使得在過程中的某一時刻之後，我們永遠有 $|y|<C$。另一方面，(由於量 x 是無窮小量)在另一個時刻之後，我們又有 $|x|<\frac{\varepsilon}{C}$。因此，在以上兩個時刻中較晚的一個到臨之後，不等式 $|y|<C$ 與 $|x|<\frac{\varepsilon}{C}$ 同時成立，因而把它們乘起來所得到的不等式

$$|xy|=|x|\cdot|y|<\frac{\varepsilon}{C}\cdot C=\varepsilon$$

也成立。因為數 ε 可以任意選取，這就表明乘積 xy 是一個無窮小量，這就證明了定理 2。

因為一切常量顯然都是有界的，所以我們有

推論 1. 常量與無窮小量的乘積是無窮小量。

又因為我們說過一切無窮小量，都同時又是有界量，所以又得到

推論 2. 兩個無窮小量的乘積還是無窮小量。

這個命題用歸納法立刻可以推廣到任意個因子的乘積。如果量 x_1, x_2, x_3 都是無窮小量，則由推論 2，乘積 x_1x_2 也是無窮小量，因此再用推論 2 就知道 $(x_1x_2)x_3=x_1x_2x_3$ 也應該是無窮小量。用同樣的方法可以從三個因子推到四個因子的情形等等。

因此，我們得到了

推論 3. 任意的一定個數的無窮小量的乘積還是無窮小量。

特別地，

推論 4. 無窮小量的任何正整數次乘冪都是無窮小量。

這樣，我們就看到了，如果把加法，減法，乘法，以及任意正整數次

的自乘等運算，不管用多少次，也不管按照什麼樣的順序施行到無窮小量上，結果得到的仍然是無窮小量。注意這些運算中並沒有除法，其實這並不是偶然的事情。兩個無窮小量之商，可能不再是一個無窮小量。事實上，假定量 x 是某過程中的一個無窮小量。根據推論 4，量 x^2 在同一過程中也是一個無窮小量。假定爲了簡單起見，在這過程中量 x 從來不等於零；則以下三個分數

$$\frac{x^2}{x},\ \frac{x}{x},\ \frac{x}{x^2}$$

的任何一個都是兩個無窮小量之商。第一個等於 x，因而是一個無窮小量；第二個等於 1，因而只是一個有界量而不是無窮小量；最後，第三個分數等於 $\frac{1}{x}$；因爲在我們的過程中 $|x|$ 要變到任意地小，所以 $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ 就要變到任意的大，換句話說，量 $\frac{1}{x}$ 也就是我們的第三個分數，不僅不是無窮小量，而且也不是有界量。

如果在某過程中的一個量 x，在全部過程的進行中都等於零，則 $|x|$ 在過程的任意時刻都小於任意正數 ϵ。因此，根據無窮小量的定義，我們應該認爲量 x 是一個無窮小量。

在全部過程的進行中都等於零的量是這個過程中的一個無窮小量。

§ 9. 無窮大量

現在我們要來討論量的另一種變化狀態，這種狀態就某種意義來說，跟無窮小量的變化狀態恰好相反。

在給定的過程中有一個量 x，如果不管正數 A 多末大，在這個過程中都可以找到這樣一個時刻，在這個時刻以後永遠有 $|x|>A$，則我們就說量 x 是（這個過程中的）一個無窮大量。

因此，跟無窮小量一樣，無窮大量完全是按照量的絕對値的性質來下定義的，與它的符號一點也沒有關係，所以與 x 同時，量 $|x|$ 必然也

是無窮大量。關於無窮大量的概念，我們必須同樣提醒注意，像 §7 附註所說的那樣，無窮大這個性質並不是指着大小而言，而是描述變量的變化狀態的；因此，如果把數值很大的量這種概念，與"無窮大量"這個術語混在一起，那是不正確的。

例 1. 在 §7 的例 2 中，從太陽到彗星的距離 r 在彗星運動的過程中是一個無窮大量。

例 2. 如果銳角 x 逐漸逼近直角，則在這個過程中 $\operatorname{tg} x$ 是一個無窮大量。又鈍角 x 向直角逼近時也是一樣(這時 $\operatorname{tg} x$ 是負的)。

例 3. 如果整數無限制地增大，則 $(-1)^n 2^n$ 是一個無窮大量(因爲 $|(-1)^n 2^n|=2^n$)。這個例子說明，像無窮小量一樣，無窮大量可以在過程的進行中，無窮多次地變更它的符號。

例 4. 從 §7 的例 3，我們可以看出來，對於任意一個常數 $\alpha>0$ 量 $(1+\alpha)^n$ 當 $n\to\infty$ 時都是無窮大量。

現在進而討論無窮大量的運算。兩個無窮大量之和可能不再是無窮大量，這可以由下述反例看出：如果 x 是一個無窮大量，則我們知道 $-x$ 也是一個無窮大量；這兩個量之和永遠是零，換句話說，是一個無窮小量。

不過，我們却有下面的重要

定理 1. 兩個量中，如果一個是無窮大量，另一個是有界量；則它們的和還是一個無窮大量。

證明. 假定在給定的過程中，x 是一個無窮大量而 y 是一個有界量，於是，就有這樣一個正的常數 C 存在，使得在過程的某一時刻之後，永遠有 $|y|<C$；假定 A 是任何一個正的常數；因爲 x 是無窮大量，所以在我們的過程中可以找到另一個時刻，在這個時刻之後永遠有 $|x|>>A+C$。由此可見，如果選擇兩個時刻中的較晚者，則在這個時刻之後，我們就永遠有

$$|x|>A+C, \qquad |y|<C,$$

由此就得到❶

$$|x+y|\geqslant|x|-|y|>A+C-C=A.$$

因爲數 A 可以任意大，這就證明了 $x+y$ 是一無窮大量。

我們已經看到，無窮大量相加，其和並不一定總是無窮大，但是，無窮大量相乘，倒跟無窮小量相乘的情形一樣。

定理 2. 兩個無窮大量之積還是無窮大量。

證明. 對於證明這一類型的定理所用的推理方法讀者已經够熟悉的了，因此，我們可以把證明說得簡略一些。如果量 x_1 與 x_2 都是給定的過程中的無窮大量，而 A 是任何一個正的常數，則從過程的某一個時刻開始，$|x_1|>\sqrt{A}$，又從另一個時刻開始 $|x_2|>\sqrt{A}$，因而從兩個時刻的較晚者開始 $|x_1x_2|=|x_1|\cdot|x_2|>A$，這就證明了定理 2。

由此，仿照我們對於無窮小量所作的那樣，我們可以用歸納法得到

推論. 任意一定個數的無窮大量的乘積都是無窮大量。

還要注意下面這個聯系無窮大量與無窮小量的命題。

定理 3. 如果 x 是一個從來不等於零的無窮小量，則 $\frac{1}{x}$ 是一個無窮大量，反之，如果 x 是一個從來不等於零的無窮大量，則 $\frac{1}{x}$ 是一個無窮小量。

要證明這個定理只要注意到不等式 $|x|<\varepsilon$ 與不等式 $\left|\frac{1}{x}\right|>\frac{1}{\varepsilon}$ 等價，又當 ε 任意地小時，$\frac{1}{\varepsilon}$ 就任意地大。

§ 10. 趨向於極限的量

我們已經研究了量的變化狀態的兩種最簡單的類型——無限制地變小與無限制地增大的量，即所謂無窮小量與無窮大量。按照我們預定的計畫，我們現在要進而討論更廣泛的一類變化狀態了，在這裏我們

❶ 這裏我們用到了初等代數裏的著名法則：二數之和的絕對值不小於二數的絕對值之差。

已經研究過的無窮小量將為我們很好地服務。

在我們的實踐中或者在我們所觀察的自然現象中，時常有這種情形，一個變量 x 無限制地逼近某一個常量 a——這樣地逼近，以致當過程進行得充分久之後，他們之間的差，按絕對值來說，可以變到並且保持任意地小。在這種情形下，我們說，量 x 在已知過程中以 a 為**極限**或**趨向於** a。我們把這件事實寫作 $\lim x=a$ 或 $x\to a$。這兩種寫法的意義完全相同。記號"lim"是由拉丁字 limes（極限，界限）的前三個字母組成的；不過按俄文應該讀作"предел"（譯者註，按中文應該讀作"極限"）。

從定義本身就很明白，在一個給定的過程中，量 x 不能有兩個不同的極限；事實上，如果 $x\to a_1$ 又 $x\to a_2$ 則在過程進行中量 $x-a_1$ 與 $x-a_2$ 兩者，按絕對值說，都要變到並且保持任意地小；因而它們之差，即常量 a_2-a_1 按絕對值說，也應該在過程進行中變到並且保持任意地小，然而這只有當 $a_2=a_1$ 時才有可能。

按照我們剛才的定義，$\lim x=a$（或 $x\to a$）這個關係式（其中 a 必須是一個常量）表明，隨着給定的過程的進行，$x-a$ 這個差按絕對值說要變到並且保持任意地小；也就是說要變到並且保持小於任意的正的常數。但是具有這樣一種變化狀態的量，正是我們前面定義的無窮小量，因此我們可以說：

量 x 在一個已知過程中趨向於一個常量 a（或者換一種說法，以常量 a 為極限），的意思是說差 $x-a$ 在這個過程中是一個無窮小量。

例 1. 把一個經過加熱的物體（溫度是 T_1）浸到盛着水（溫度是 $T_2<T_1$）的容器內。漸漸地物體變冷下來（T_1 減小）而周圍的水則逐漸變熱（T_2 增大）；T_1 與 T_2 兩個量在這個時候都無限制地逼近某一個平均溫度 T（$T_2<T<T_1$），所以在過程的進行中 T_1-T 與 T_2-T 都是無窮小量。因而我們有

$$\lim T_1=T, \qquad \lim T_2=T$$

或

$$T_1 \to T, \qquad T_2 \to T.$$

例 2. 接連地把錢幣任意投擲 n 次，記下每一次所擲錢幣的那一面朝上。假定在 n 次投擲中，有 m 次投出來的是國徽；隨着 n 的增大，m 也逐漸增大。經驗告訴我們，如果錢幣在幾何形狀上是規則的，又在物理結構上也是均勻的，則當投擲次數很大時，國徽被投出的次數大致佔總次數的一半，也就是說比值 $\frac{m}{n}$ 接近於 $\frac{1}{2}$。我們可以認為在實驗上已經證明：當 n 無限增大時，差數

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{2}$$

(時而是正的，時而是負的)按絕對值來說，終歸要變到保持任意地小，換句話說，在投擲次數無限增大的過程中，這個差數是一個無窮小量。因此，在我們的過程中

$$\lim \frac{m}{n} = \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{m}{n} \to \frac{1}{2}.$$

例 3. 如果量 x 在某一個過程中是一個無窮小量，則量 $y = a + bx + cx^2$（其中 a, b, c 都是常數）在這個過程中以 a 為極限。事實上，$y - a = bx + cx^2$，又因為 x 是無窮小量，用 § 8 中的定理很容易證明量 $bx + cx^2$，是一個無窮小量。

例 4. 如果在某一個過程中量 x 是一個無窮小量，則量 $\cos x$ 以 1 為極限。事實上，從過程中某一時刻開始，$|x| < \frac{\pi}{2}$，換句話說，x 是一個銳角，因而 $\cos x > 0$。因此從等式 $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ 就得到

$$0 \leqslant 1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} < \sin^2 x.$$

又因為當 x 是無窮小量時，$\sin x$ 也是無窮小量，所以 $\sin^2 x$ 也是無窮小量（§ 8 中定理 2 的推論 4）。因此，介於 0 與一個無窮小量之間的量 $1 - \cos x$ 也是無窮小量，這就表明在我們的過程中

$$\cos x \to 1.$$

例 5. 對於任意一個常數 $a > 0$，當 n 無限增大時，量 $\sqrt[n]{a}$ 都以 1 為極限。事實上，假定 $\varepsilon > 0$ 是任意給定的；我們知道（§ 7 例 3）當 n 無

限增大時，量$(1-\varepsilon)^n$是一個無窮小量而量$(1+\varepsilon)^n$是一個無窮大量；因此對於充份大的n，有

$$(1-\varepsilon)^n<a<(1+\varepsilon)^n,$$

因此

$$1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon,$$

或即

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon,$$

這就證明了我們的論斷。

以上引進的這些例子指出了，變量趨向於它的極限可以有種種不同的方式。例如在例1中，量T_1趨向於它的極限時，不斷地減小；相反地（在同一例中）量T_2趨向於它的極限T時，則不斷地增大。在例2（關於投擲錢幣的經驗），理論與經驗一致地指出。當投擲次數n逐漸增加時，"國徽出現率"$\frac{m}{n}$，時而大於，時而小於（也有時等於）$\frac{1}{2}$；在這裏，我們看到這樣一種量，它在趨向於它的極限時，隨着所考慮的過程的進行，時而增大，時而減小。

雖然當量趨向於它們各自的極限時，可能有這樣顯著的各種不同的狀態，但是所有這些量畢竟具有一系列的共同的重要性質，所以最好還是把它們歸為一類。我們現在就來研究若干這種重要性質。

定理 1. 在某過程中趨向於極限的量，在這個過程中一定是有界的。

證明. 假定在某過程中$x\to a$。於是差$x-a$是一個無窮小量，因而從過程中某時刻起，$|x-a|<1$，因此，由$x=a+(x-a)$就得出

$$|x|\leqslant|a|+|x-a|<|a|+1.$$

這個不等式（右端是一個正的常數）從我們的過程的某一個時刻起，以後就永遠成立；這正好說明，量x在已知過程中是有界的。

定理 2. 如果在某一個過程中$x\to a$而$a>0$，則從過程的某一個時刻起，以後永遠有$x>0$。

換句話說，如果一個量以正數為極限，則這個量從這個過程的某一

個時刻起，以後應該保持是正的。

證明．假定 b 是任意一個小於 a 的正數$(0<b<a)$。因爲差數 $x-a$ 是一個無窮小量，所以從過程的某一個時刻起

$$|x-a|<b;$$

因爲 $x=a+(x-a)$，所以從這個時刻起

$$x\geqslant a-|x-a|>a-b>0,$$

這就是所要證明的。

推論 1. 如果在某一個過程中 $x\to a$ 而 $a<0$，則從這個過程的某一個時刻起，永遠有 $x<0$。

推論 2. 如果 $x\to a$，又從這個過程的某一個時刻起永遠有 $x\geqslant 0$，則 $a\geqslant 0$。如果從過程的某一個時刻起永遠有 $x\leqslant 0$，則 $a\leqslant 0$。

這兩個推論的證明是這樣明顯，我們可以不必在這裏敘述了。

現在假定在某過程中 $x\to 0$。我們知道，這等於說 $x-0=x$ 是一個無窮小量，於是得到下面的命題：

定理 3. 所有無窮小量都以零爲極限，反之，所有以零爲極限的量，都是無窮小量。

這個定理有很大的原則性的意義。它說明我們以前研究的無窮小量是趨向於極限的量的一種特殊情形。

與此相反，無窮大量不趨向任何極限；因爲無窮大量顯然不是有界的，所以從定理 1 可以推出，它不趨向於任何極限。

最後，我們還有

定理 4. 每一個常量都是它自己的極限。

要證明這個定理，只須注意到 $a\to a$ 這個所要證明的關係。等於要證明差數 $a-a$ 是一個無窮小量；但是 $a-a=0$，而我們知道（參看 § 8 的結尾）常量零是一個無窮小量。

趨向於極限的量的進一步的性質，與這些量的運算有關，我們在下一節中來討論它們。

§ 11. 趨向於極限的量的運算

定理 1. 如果在某個過程中 $x_1\to a_1, x_2\to a_2, \cdots, x_n\to a_n$，則

$$x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n\to a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n.$$

這個定理通常敘述成：(一定個數的量的)代數和的極限等於極限的代數和。如果把定理的結論寫成以下的等價形式，這種敘述法就顯得更自然：

$$\lim(x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n)=\lim x_1\pm\lim x_2\pm\cdots\pm\lim x_n.$$

這裏必須這樣清楚地了解：右端每一個極限的存在是這個定理的不可缺少的假定，而反之，整個代數和極限的存在則已經不是假定而是結論了(因而自然也就是需要證明的)。定理 1 的最完備的(雖然是較長的)文字敘述應該是：如果在某個過程中，量 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 中的每一個都有極限，則這些量的代數和也就有極限，並且這個代數和的極限就等於它的每一項的極限的代數和。對於以後一切這種類似的定理我們都應該抱以上申明的這種態度。

證明. 從定理的假定可知，在給定的過程中，所有下面這些差

$$x_1-a_1=\alpha_1,\ x_2-a_2=\alpha_2,\ \cdots,\ x_n-a_n=\alpha_n$$

都是無窮小量。根據 §8 定理 1，它們的代數和 $\alpha_1\pm\alpha_2\pm\cdots\pm\alpha_n$ 也是無窮小量。但這個代數和顯然等於

$$(x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n)-(a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n);$$

由此就直接推出

$$x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n\to a_1\pm a_2\pm\cdots a_n,$$

因而定理 1 就證明了。

定理 2. 如果在某一個過程中 $x_1\to a_1,\ x_2\to a_2,\ \cdots,\ x_n\to a_n$，則

$$x_1x_2\cdots x_n\to a_1a_2\cdots a_n.$$

證明. 先就兩個因子($n=2$)的情形來證明定理 2。令 $x_1-a_1=\alpha_1$，$x_2-a_2=\alpha_2$，於是 α_1 與 α_2 都是無窮小量。由此可得

$$x_1=a_1+\alpha_1,\qquad x_2=a_2+\alpha_2,$$

$$x_1x_2=a_1a_2+a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2.$$

$$x_1x_2-a_1a_2=a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2.$$

這個等式右端的三項都是無窮小量(前兩項根據 §8 定理 2 的推論1,而最後一項根據該定理的推論 2),因而根據 §8 定理 1,等式的整個右端是一個無窮小量,從而整個左端也是一個無窮小量. 但是若 $x_1x_2-a_1a_2$ 是無窮小量的意義也就是 $x_1x_2\to a_1a_2$. 這就證明了當 $n=2$ 時的定理 2。由此出發推到 $n=3$,然後 $n=4$ 等等情形沒有任何困難。例如,假定 $x_3\to a_3$ 而且當 $n=2$ 時的定理 2 已經證明了,就有

$$\lim(x_1x_2x_3)=\lim[(x_1x_2)x_3]=\lim(x_1x_2)\lim x_3=\lim x_1\lim x_2\lim x_3,$$

而這就證明了定理 2 當 $n=3$ 的情形。

定理 3. 如果在某一個過程中 $x\to a$ 又 k 是一個常量,則 $kx\to ka$。

因爲根據 §10 定理4,$k\to k$,所以定理 3 是定理 2 的一個直接推論。定理 3 的結論也可以寫成

$$\lim(kx)=k\lim x,$$

由於此,這個定理也可以敍述成: 常數因子可以拿到極限符號外邊來。

定理 4. 如果在某一個過程中 $x\to a$, 又 n 是任意一個固定的自然數,則 $x^n\to a^n$。

這個定理顯然是定理 2 的特殊情形。

從定理 4,3 與 1 立刻推出

定理 5. 如果 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是關於 x 的任意一個多項式, 又在某一個過程中 $x\to a$, 則在這同一個過程中 $P(x)\to P(a)$。

例. 設 $P(x)=2x^3-4x^2+5x-12$。假如在某一個過程中 $x\to2$,就有

$$P(x)\to P(2)=-2.$$

以上我們還只研究了加法、減法、乘法與自然數次乘方等運算運用到有極限的量上的情形。現在我們要轉到關於除法運算的定理。

定理 6. 如果在某一個過程中 $x\to a$ 並且 $a\neq 0$，則在這個同一個過程中 $\frac{1}{x}\to\frac{1}{a}$。

證明. 首先根據§10定理2（或它的推論1），從 $a\neq 0$ 可以推出：從過程的某一時刻以後 $x\neq 0$，所以 $\frac{1}{x}$ 有確定的意義。其次，因爲量 $x-a$ 是無窮小量，所以從某一時刻起，$|x-a|<\frac{1}{2}|a|$，從而

$$|x|=|a+(x-a)|\geqslant|a|-|x-a|>|a|-\frac{1}{2}|a|=\frac{1}{2}|a|,$$

於是

$$\frac{1}{|x|}<\frac{2}{|a|},$$

也就是

$$\frac{1}{|ax|}<\frac{2}{a^2}.$$

這個不等式說明，在我們的過程中量 $\frac{1}{ax}$ 是有界的。因此根據§8定理2，量

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{1}{ax}(a-x)$$

是一個無窮小量，而這就表示 $\frac{1}{x}\to\frac{1}{a}$。這樣定理6就證明了。

定理 7. 如果在某一個過程中 $x_1\to a_1$, $x_2\to a_2$ 又 $a_2\neq 0$，則 $\frac{x_1}{x_2}\to\frac{a_1}{a_2}$。

證明可以直接從定理6與定理2（$n=2$）推出。

推論. 如果 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 是關於 x 的任意兩個多項式，如果在某一個過程中 $x\to a$，又 $Q(a)\neq 0$，則

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\to\frac{P(a)}{Q(a)}.$$

因爲，根據定理5，從 $x\to a$ 可得 $P(x)\to P(a)$, $Q(x)\to Q(a)$，所以推論的結論可以作爲特殊情形從定理7直接推出來。

定理7使我們可以通過分子分母的極限來計算一個分式的極限，只要分子分母的極限都存在而且分母的極限不爲零就行。如果 $a_2=0$，則這個定理對於研究分式 $\frac{x_1}{x_2}$ 毫無作用。不難看出，當 $a_2=0$ 時，分式 $\frac{x_1}{x_2}$

要有極限的話只有在 $a_1=0$ 的條件下才有可能。事實上，因為 $x_1=\frac{x_1}{x_2}x_2$，所以，如果 $\lim x_2=0$ 而且 $\lim\frac{x_1}{x_2}=b$ 存在，則我們根據定理 2 $(n=2)$ 就有

$$a_1=\lim x_1=\lim\frac{x_1}{x_2}\lim x_2=b\cdot 0=0.$$

因此，我們得到了下面的結論。

定理 8. 如果一個分式的分母是一個無窮小量，則這個分式只有在分子也是一個無窮小量的條件下才可能有極限存在。

在這種情形下所給的分式是兩個無窮小量之商。而這樣的商，像我們在 §8 裏看到的，可以具有各種不同的變化狀態；因此對每一種情形就需要作特殊的研究。在這裏我們僅僅指出：這種變化狀態的研究，這種對於這一個或那一個無窮小量之比的變化狀態的研究，我們後面就會看到，它是整個數學分析中最重要的問題之一。在本節之末我們要考慮這類問題的一個具體例子。

在考慮這個例子之前，我們要先建立兩個命題，它們對於變量極限的估計與實際計算都是非常重要的。

定理 9. 如果 $x\to a,\ y\to b$，並且從過程的某一時刻起永遠有 $x\geqslant y$，則 $a\geqslant b$.

關於這個定理的證明只要把 §10 定理 2 的推論 2 應用到差 $x-y$ 就行。

定理 10. 如果從過程的某一時刻起我們永遠有

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2, \tag{1}$$

又變 x_1 與 x_2 在這個過程中都趨向於同一個極限 a，則變量 x 一定也以 a 為極限.

證明. 從 (1) 可得

$$0\leqslant x-x_1\leqslant x_2-x_1,$$

於是

$$|x-x_1|\leqslant|x_2-x_1|; \tag{2}$$

但是 $\lim(x_2-x_1)=\lim x_2-\lim x_1=a-a=0$，所以 x_2-x_1 是一個無窮小量。根據 (2) 量 $x-x_1$ 也是一個無窮小量，即 $x-x_1\to 0$。但是

$$x=x_1+(x-x_1);$$

因為 $x_1\to a$ 又 $x-x_1\to 0$，所以 $x\to a+0=a$，這就是所要證明的。

定理 10 的價值是這樣的，在具體問題中，我們要想求得極限的那個量 x，有時具有複雜而難於進行分析的表達式，這就使得我們的工作遭到很大的困難，但是有時却容易證明量 x 永遠是在另外兩個量 x_1 與 x_2 之間，而這兩個量具有簡單得多的結構，於是定理 10 就能够發揮作用了：如果我們可以證明量 x_1 與 x_2 趨向於同一個極限 a，則根據定理 10 就立刻知道 $x\to a$。這樣一來，我們就有可能求出量 x 的極限而不必直接去研究它的複雜的表達式了。現在我們就來考慮一個這類的具體例子，這個例子同時是無窮小量之比的極限演算的重要例子之一。

問題．假定 x 是某過程中的一個無窮小量，試證明比式 $\frac{\sin x}{x}$ 有極限存在，並且求出這個極限❶。

解．考慮如圖 8 所示的，普通三角中的半徑為 1 的圓的一部份。三角形 OAC 的面積顯然等於 $\frac{1}{2}\sin x\cos x$，它小於扇形 OAB 的面積 $\frac{1}{2}x$，而這個扇形的面積又小於三角形 ODB 的面積

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}.$$

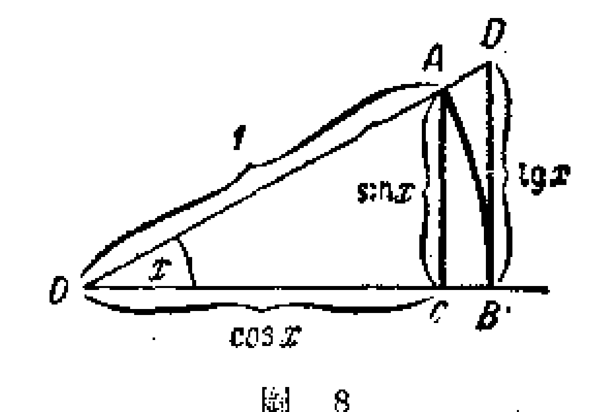


圖 8

因此，我們得到

$$\frac{1}{2}\sin x\cos x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x},$$

即

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

❶ 為了簡單起見，我們假定在給定的過程中 x 不等於零。

但是當 $x\to 0$ 時我們有（§10 例 4）$\cos x\to 1$，於是根據定理 6 就有 $\frac{1}{\cos x}\to 1$。所以上面不等式的左端與右端當 $x\to 0$ 時都趨向於 1。因此根據定理 10 我們可以斷定

$$\frac{x}{\sin x}\to 1,$$

從而（再用定理 6），當 $x\to 0$ 時，

$$\lim\frac{\sin x}{x}=1.$$

在這裏我們只是爲了簡單起見才假定了 $x>0$。其實因爲比式 $\frac{\sin x}{x}$ 在以 $-x$ 代 x 時不改變，所以無論量 x 怎樣趨向於零結果都是一樣。

以上所得到的結果，對於計算那些表達式中含有三角函數的量的極限時有很大的價值。例如，如果 x 是無窮小量，則分式

$$y=\frac{1-\cos x}{x^2}$$

的分子與分母也都是無窮小量。因爲 $1-\cos x=\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$，所以

$$y=\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

但是當 $x\to 0$ 時我們有

$$\cos x\to 1,\qquad \frac{\sin x}{x}\to 1,$$

所以

$$y=\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{1}{2}.$$

§12. 不同級的無窮小量與無窮大量

現在我們暫時再回到無窮小量與無窮大量來對它們的理論作某些補充。

假定有參與在某一個過程中的兩個無窮小量 x 與 y。我們要來比較他們減小的快慢。爲此，我們考慮比式 $\frac{y}{x}$（爲簡單起見我們總假定在我們的過程中，或至少從它的某一個時刻以後，x 不等於零，所以量

$\frac{y}{x}$在任何時刻都有確定的意義)。有時候,可能比式$\frac{y}{x}$本身還是一個無窮小量,這類例子我們已經在 §8 中看到過。顯然這就表示在我們的過程中,量 y 不僅本身是一個無窮小量,而且與無窮小量 x 的比還是無窮小量,所以,假如我們的過程進行到充分長久之後,$|y|$ 將只是量 $|x|$ 的極其微小的一部份。例如 $y=x^2$ 的情形就是這樣的。在這種情形我們說量 y 是較 x 高級的無窮小量。或者倒過來說, x 是較 y 低級的無窮小量。

現在假定比式$\frac{y}{x}$在給定的過程中是一個無窮大量,根據 §9 定理 3 反比 $\frac{x}{y}$ 就是一個無窮小量,這就表示 x 是較 y 高級的無窮小量(亦即 y 是較 x 低級的無窮小量)。

最後,我們還要考慮一種情形,即在某一個過程中, 兩個無窮小量之比 $\frac{y}{x}$ 既不無限減小,又不無限增大, 而其絕對值介於兩個正數之間。也就是說, 有這樣兩個正的常數 a 與 b 存在使得從我們過程的某一時刻起,

$$a<\left|\frac{y}{x}\right|<b.$$

顯然, 這就表示在給定的過程中量 $|x|$ 與 $|y|$ 中沒有一個能減小得遠遠超過其他一個。在這種情形我們就說量 x 與 y 是同一級的無窮小量或有相同的無窮小的級。特別當比 $\frac{y}{x}$ 在給定的過程中趨向於某一個不等於零的極限 a 時,上述情形總是成立的。事實上, 假如真是這樣, 那末,顯然無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小,從某一時刻起

$$|a|-\varepsilon<\left|\frac{y}{x}\right|<|a|+\varepsilon,$$

其中數 $|a|-\varepsilon$ 與 $|a|+\varepsilon$ 當 ε 充分小時都是正的常數。

顯然,如果

$$a=\lim\left(\frac{y}{x}\right)=1,$$

則無窮小量 x 與 y 在牠們的變化過程中, 彼此特別近似。這時量 x 與

y 稱為是兩個等價的(相抵的)無窮小量。無窮小量 x 與 y 的等價關係記作：$x\sim y$。在前一節的末尾我們證明了無窮小量 x 與 $\sin x$ 彼此等價。無窮小量等價的概念對極限的計算有重大的價值。這個價值基於下述命題。

定理 1. 如果 x 與 y 是兩個等價的無窮小量，而 z 是參與在同一個過程中的第三個量，則從 $xz\to a$ 可以得到 $yz\to a$。

換句話說，如果某一個量趨向於一個極限，又如果這個量的任何一個無窮小因子用任意一個與之等價的無窮小量代替時，則經過代替後所得到的量仍然趨向於同一極限。

要證明定理 1 只要注意到：從

$$yz=\frac{y}{x}xz$$

就可以得到

$$\lim(yz)=\lim\left(\frac{y}{x}\right)\lim(xz)=1\cdot a=a.$$

當計算這個或那一個表達式的極限時，定理 1 常常給我們以這樣的可能性，就是用較簡單的無窮小量代替這個表達式的個別與之等價的無窮小因子，這樣來簡化我們所提出的問題的解決方法。例如上一節最後一個問題的解法中我們可以在表達式

$$y=\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\cdot\frac{1}{x^2}$$

中，根據 $\sin x\sim x$，直接用 x^2 來代替 $\sin^2 x$。這樣一下子就可以寫成

$$\lim y=\lim\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

就是這個關係式 $\sin x\sim x$ 也使得我們可以一下子求出像下列這樣的極限(x 是一個無窮小量)：

$$\lim\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim\frac{x}{x(x^2+3)}=\lim\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

以上我們考慮了參與在同一個過程中的兩個無窮小量 x 與 y 之間

的兩種關係：1）其中一個是較另一個高級的無窮小量；2）它們是同級的無窮小量(特別情形是彼此等價)。然而這兩種關係，對參與在同一過程中的兩個無窮小量來說，還不是它們減小的快慢（表現為無窮小的級)之間的全部可能的關係。相反地，我們考慮過的那些情形只是最簡單最容易研究的情形。一般說來，兩個無窮小量之比 $\frac{y}{x}$ 可以是非常複雜的。例如量 $\left|\frac{y}{x}\right|$ 在過程的進行中可以時而變成任意地小時而又變成任意地大，並且這兩種現象可以一再地發生，乃至於無論過程已經進行到多久還是這樣。在這種情形我們就既不能說量 y（與 x 比)是較高級的，也不能說是較低級的，同樣也不能說是同一級的無窮小量，而不得不認為量 y 與 x 在其減小的快慢關係中彼此是**不能比較的**。邏輯上來說，我們應當認為正是這種不能比較的情形是最普通的。不過，在實際上我們常碰到的，倒往往是我們以上考慮的特殊情形中的某一種。

到現在為止我們在這一節裏對無窮小量所講的一切，都可以經過一個相應的自然應該如此的改變之後，就搬用到無窮大量上來。假定量 x 與 y 是參與在某一個過程中的兩個無窮大量。如果比 $\frac{x}{y}$ 還是無窮大量，則 x 就是較 y 高級的無窮大量，而 y 是較 x 低級的無窮大量。如果 $\left|\frac{x}{y}\right|$ 從某一個時刻以後永遠介於兩個正數之間，則 x 與 y 是同一級的無窮大量，如果在給定的過程中 $\lim\left(\frac{x}{y}\right)$ 存在而且不等於零，則上述情形一定成立。特別如果 $\frac{x}{y}\to 1$，則說 x 與 y 是等價的（相抵的）無窮大量，並寫作 $x\sim y$。當計算極限時，無窮大量的因子，像無窮小量情形一樣，可以用與之等價的無窮大量來代替。

無論是在無窮小量或無窮大量的情形，不僅在質量上(高級、低級、同級)而且在數量上來估計這些量的級，時常是有用的。這可以像以下這樣來做。選定不論怎樣的一個無窮小量，設為 x，來作為標準。於是凡與 x 同級的無窮小量都叫做**一級**的無窮小量❶，特別像每一個與 x

❶ 我們提醒一下：如果在給定的過程中從某一個時刻以後永遠有 $a<\left|\frac{y}{x}\right|<b$，其中 a 與 b 都是正的常數，則 y 就與 x 同級。

等價的無窮小量就都是一級無窮小量。其次，量 x^2 以及凡與之同級的量都叫做二級的量，一般每一個與 x^α 同級的量叫做 α 級的無窮小量，其中 α 是任何一個正的常數。對於無窮大量增大的級可以有完全類似的定義。

例 1. 在前一節末解答的問題中，如果以無窮小量 x 爲標準，則量 $1-\cos x$ 是一個二級無窮小量。

例 2. 假定

$$y=a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}+\cdots+a_kx^{n_k},$$

其中常數 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 不爲零，而正數 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 滿足關係 $n_1<n_2<\cdots<n_k$。於是 1）如果 x 是標準無窮小量，則 y 是 n_1 級的無窮小量；2）如果 x 是標準無窮大量，則 y 是 n_k 級的無窮大量。

在本節結束的時候，我們還要介紹一組非常方便的符號，所有這些符號在近代數學中已經廣泛使用着。它們將在以後給我們以極大的方便。假定 y 與 x 是參與在某一個過程中的兩個量，又假定 x 永遠是正的(或至少從給定過程的某一時刻以後永遠是正的)。於是 1）如果比式 $\frac{y}{x}$ 在給定的過程中是有界的，則我們記作

$$y=O(x);$$

2）如果比式 $\frac{y}{x}$ 在給定的過程中是一個無窮小量(即有極限零)。則記作

$$y=o(x).$$

顯然，從 $y=o(x)$ 可以推得 $y=O(x)$，但是反過來不對。當然，這兩個關係式的成立，必需要有一個完全確定的過程，而量 x 與 y 都參與在這個過程之中，一般說來，在另外的過程中這同一個關係式就往往不再成立。

例 3. 假定 x 是一個無窮小量，則

$$x^2=o(x),$$

$$5x+3x^2=O(x),$$

$$2\sin x = O(x),$$

$$1-\cos x = o(x).$$

例 4. 假定 x 是一個無窮大量，則

$$x = o(x^2)$$

$$5x+3x^2 = O(x^2).$$

例 5. 對於量 x 的任何變化狀態，從 $y=o(x)$ 可以推出 $x+y\sim x$；反之，從 $x>0$ 與 $x+y\sim x$ 也可以推出 $y=o(x)$。

例 6. 在給定的過程中 x 是一個無窮小量這件事可以寫成

$$x = o(1);$$

類似地，關係式

$$1 = o(x)$$

表示在給定的過程中 x 是一個正的無窮大量，而關係式

$$x = O(1)$$

表示在給定的過程中量 x 是有界的。因此，我們已經看到了，符號 O 與 o 使我們能夠在某種情形下，非常簡單地來描寫這一個或那一個量的變化狀態。

第三章　極限概念的精確化與推廣

§ 13. 過程的數學描述

在前面各節裏，我們所討論的一切量，都看作是參與在某一個確定的過程中的，我們研究的對象，就是這些量在這個過程中的變化狀態。我們談到過在一個已知過程中的不同的時刻，也曾區別過較早的時刻與較晚的時刻。整個這套說法既簡單明瞭而且方便，並且還能幫助我們樹立起以下的正確觀念，即數學分析中的重要概念(變量、函數、極限)都是從對客觀世界的觀察與研究中產生的。但是，儘管如此，在數學的理論中，這種說法却還需要進一步加以精確化，因為在這種說法裏，關於過程及其不同的時刻這些基本概念，還沒有真正的數學的定義。我們在前面利用這些概念時，並不是指任何嚴格確定的數學對象來說的，而只是指那些跟我們日常經驗相聯繫的、為大家所熟知的直覺觀念來說的。要想成為真正的數學研究的對象，每一個過程就應當精確地數學地加以描述，來擺脫那些沒有精確定義的含糊觀念。這樣的描述必須是這些概念的抽象形式的與刻劃性的描述，沒有這種描述，任何數學理論工作都是不能進行的。

當我們觀察在以前各節裏所討論過的那些實際的或純粹數學的過程時，我們容易注意到，過程的這種數學刻劃或抽象形式結構，對於不同的過程，時常可能是不同的。

但是，有一個特點却是我們前此觀察過的一切過程所固有的。首先把這個特點指出來，對我們來說非常重要。這個特點就是任何一個過程的不同的時刻，都是用某一個變量的一串數值體現出來的，而這個變量的變化就是這個過程的真實意義。因此，我們很自然地把這個變量叫做這個過程的基本變量。下面用一些例子來說明這一點。

例 1. 在§7的例3裏（以$\frac{1}{2^n}$爲第n項的幾何序列），過程就是序列的號碼n順次通過全部自然數列($n=1,2,\cdots$)。我們把數n的不同的值就叫做這個過程的不同的時刻，並且以n的較小的值相當於"較早"的時刻，較大的值相當於"較晚"的時刻。n的任意一個函數都叫做"參與"在這個過程中的量。特別，像我們現在這個例子裏所考慮的量$\frac{1}{2^n}$就是這樣的一個函數。數n就是這個例子裏的"基本"變量。

例 2. 在§7的例1裏（在定溫下氣體的膨脹），基本變量是有已知質量的氣體的體積v。過程就是量v的無限增大。過程的不同的時刻就是量v的不同的值。跟前一個例子一樣，v的較小的值意味着"較早"的時刻，較大的值則是"較晚"的時刻。但是和前例不同的是：在前例中n只能取整數值，而變量v無限增大時則是連續地變化着的，它通過它自己的任兩個值之間的一切中間值。我們也把v的任何一個函數算作是"參與"在這個過程中的量。特別像我們在§7的例1裏所考慮的量$p=\frac{c}{v}$，就是這樣的一個函數。

例 3. 現在我們來考慮由正數x無限制地減小所形成的過程。我們就把x算作是這個過程的基本變量。x的較大的值算作是"較早"的時刻，較小的值是"較晚"的時刻。參與在這個過程中的量就是x的任何一個函數，例如$1+x+x^2$，$\cos x$等。在這個過程中的基本變量，不同於以上所考慮的兩個基本變量；它不是順次增大，而是逐漸減小以至於趨向於零的。在§10的例4裏，我們已經考慮過參與在這個過程中的量$\cos x$的性質。

總結以上的討論，我們知道，從數學的觀點來看，每一個過程應該看作是這個過程的"基本"變量的一串數值。這個變量的不同的值就是這個過程的不同的時刻，或者這個過程的較早的時刻常對應於較小的值，較晚的時刻常對應於較大的值，或者是剛好相反，換句話說，就是這個過程的基本變量或者不斷地增大，或者不斷地減小。基本變量的任何一個函數都叫做參與在這個過程中的量。

我們到現在爲止所碰到的過程，其共同的特點就是以上所說的這樣。現在要問，從形式數學的觀點來看，這些過程究竟可以怎樣來彼此區別呢？如果要擺脫這些過程的實際內容，而只談它們的數學結構，那末，如我們所看到的，它們彼此間只能在基本變量的性質上有所區別。這就是說，基本變量的變化狀態確定了，或者說刻劃了過程的數學本質。而過程，如我們所知可以是很不相同的。以上我們作爲例子只舉出了過程的三種類型。其實，除此而外，還可以有許多其他更複雜的類型。例如我們可以有"混合型的過程"，其中基本變量時而跳躍地變化着（像第一個例子一樣），時而連續地變化着（像其他兩個例子一樣）。但是，對於數學分析來說，以上考慮過的那些類型，是基本的，也是最重要的，我們完全可以只限於研究上面所舉過的那三種類型。因此，我們以後永遠可以把過程看作是某個"基本"變量的一串數値，這個變量或者以自然數爲其値（即不斷增大的跳躍式的變化），或者連續地變化，通過一切中間數値。在後一種情形，它可以不斷地增大，也可以不斷地減小。如果它不斷地增大，則它又可以無限制地增大，也可以始終保持有界。當然，對於不斷減小的變量，也有類似的兩種可能性。在所有以上談到的這些情形中，基本變量的變化性質完全確定了過程的數學類型。雖然這些類型可以有多種多樣，但對於整個數學分析來說，正如上面已經指出的，只要考慮我們所列舉過的那少數幾個簡單類型就完全够了。

§ 14. 極限概念的精確化

在第二章裏我們曾經這樣規定，如果參與在某一個過程中的量 y 與一個常數 b 之差 $y-b$ 是在這個過程中的一個無窮小量，我們就說量 y 以 b 爲它的極限。因此，在任何情形下，極限的概念都通過無窮小量的概念而有了確切的意義。但是，怎樣的量我們叫做無窮小量呢？我們也曾經規定過，如果不論正數 ε 是怎樣小，從我們的過程的某一時刻起，不等式 $|y-b|<\varepsilon$ 永遠成立，我們就說差 $y-b$ 是一個無窮小量。

像在前節裏我們已經指出的，用沒有精確定義的過程以及它的時刻這種含糊觀念，所形成的這種說法，是不能使我們滿意的。但是現在我們已經知道什麼是過程的正確的數學含義了。因此，只要不用基於直觀的含糊的名詞"過程"與"時刻"，而分別代替以明確規定了的相應的數學概念，我們現在就完全可以把無窮小量的概念(也就是說，極限概念)弄得完全精確了。本節的目的就在使極限概念精確化。容易預料到，對於不同類型的過程，我們需要引進不同的說法。因此我們必須對前節中所列舉的過程的每一個基本類型，分別引進不同的說法。應該注意的是，我們以前的不很精確的極限定義，正由於它的不嚴格，倒可以對任何類型的過程作統一的敘述。就虧這樣，我們在第二章裏才有可能根據這個定義，對具有任何數學構造的過程，一下子建立起全部的極限理論。

1. 序列的極限 我們考慮基本變量 n 順次通過自然數列 ($n=1, 2, \cdots$)的過程。我們已經說過，自然數 n 的任何一個函數都叫做參與在這過程中的量，例如 $\frac{1}{2^n}$，$n!$，半徑為 1 的圓的內接正 n 角形的周界 p_n 等等。現在設 a_n 是任意的這樣一個函數。在給定的過程中，這個量依次取下列數值：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots. \qquad (1)$$

現在我們要把"量 a_n 在給定的過程中趨向於極限 a"這句斷語的意義完全精確地揭露出來。

我們知道，這個斷語原來的意義是這樣的：無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，從過程的某一時刻起，不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 都永遠成立。但是"從過程的某一時刻起"這句話的意義是什麼呢？基本變量的不同的數值就是我們這個過程的不同的時刻，n 愈大，對應的時刻愈晚。因此"從過程的某一時刻起"這幾個字的精確意義實際上就是"從數 n 的某一個值 n_0 起，對於一切大於 n_0 的值"。因此，我們斷語的精確意義就可以說成：如果不論正數 ε 怎樣小，總有這樣一個自然數 n_0，使得對於任何 $n \geqslant n_0$，

$|a_n-\alpha|<\varepsilon$ 都成立，我們就說量 a_n 趨向於極限 α。當然，這個說法比我們以前的定義要複雜得多。但是我們看得出，它已經完全擺脫了那些規定得不够明確的名詞（"過程"以及它的"時刻"），而只包含着意義精確的概念了。所以這樣確定的極限概念，對於建立嚴格的數學理論來說，已經完全合適了。

在我們現在所討論的這一型過程中，我們經常不說"函數 a_n"，而說成"數列"(1)。在 $a_n\to\alpha$ 的情形，序列(1)稱爲是收斂的，而數 α 就叫做它的極限。假如在給定的過程中 a_n 沒有極限，我們就說序列(1)發散。

基本變量 n 在過程中無限增大這一事實，常用記號 $n\to\infty$ 表示，或者更精確一些，用 $n\to+\infty$ 表示。但是要注意，在這裏，記號 $\to$ 並不像普通那樣表示趨向於某一極限，因爲無限增大的量不可能有極限。於是，整個"序列(1)以數 α 爲極限"這句話（它的精確意義現在已經爲我們完全揭露了）就可以簡單地用記號表示作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,$$

或

$$a_n\to\alpha\ (n\to\infty).$$

這兩種寫法都既能完全表達出我們直接關切的事實（$\lim a_n=\alpha$ 或 $a_n\to\alpha$），又能指出這個事實在其中發生的那個過程（$n\to\infty$）。

例． 用 a_n 來記幾何序列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

的最初 n 項之和，我們就得到

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n},$$

於是序列(1)成爲下面這樣：

$$1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2^3},\ \cdots,\ 1-\frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

顯然，我們有 $a_n\to 1\ (n\to\infty)$。事實上，因爲

$$|a_n-1|=\frac{1}{2^n}\ (n=1,2,\cdots),$$

所以無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，我們可以取 n_0 這樣大，使得 $\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$，於是對於任何 $n\geqslant n_0$，我們都得到

$$|a_n-1|<\varepsilon.$$

2. 函數的單邊的極限 現在我們來討論第二種基本類型的過程，也就是基本變量 x 連續變化，通過一切中間數值的過程。這個變量可以不斷地增大也可以不斷地減小，同時它可以保持有界，也可以變成無窮大(即絕對值無限增大)。所有這一切不同的情形，都需要一個一個地加以研究，不過好在處理它們的時候，有許多共同之點，這使得我們的解釋可以大爲縮短。在一切情形下，參與在給定過程中的量 y，都是基本變量 x 的函數 $y=f(x)$，而我們的任務就在於去闡明"量 y 在給定的過程中以數 b 爲極限"這句斷語的精確意義。

先從正的基本變量 x 無限增大 $(x\to+\infty)$❶ 的情形講起。這種情形非常接近於我們剛才所討論的那一種，所不同的僅在於這裏的 x 是通過一切中間值而增大，而基本變量 n 則只能取整數值而已。因此，跟剛才一樣，"從過程的某一時刻起"這句話在這裏應該是說："從變量 x 的某一個值 A 起，對於一切大於 A 的值"。斷語

$$\lim_{x\to\infty} y=b \quad \text{或} \quad y\to b\ (x\to\infty)$$

的精確意義就應該是：無論正數 ε 怎樣小，總有一個正數 A 存在，使得對於任何 $x\geqslant A$，$|y-b|<\varepsilon$ 都成立。

當基本變量 x 是負的而且是無窮大量時 $(x\to-\infty)$，也就是說 x 是負的而其絕對值無限增大時，$y\to b$ 這個關係式自然有完全類似的定義：關係式

$$\lim_{x\to-\infty} y=b \quad \text{或} \quad y\to b\ (x\to-\infty)$$

的意義是：不論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總有這樣一個正數 A 存在，使得對於任何

❶ $x\to\infty$ 或 $x\to+\infty$ 的寫法只表示量 x 的無限增大，並不管 x 的變化是連續的還是跳躍的。所以相應的變化狀態必須在課文裏每次特別說明。

$x\leqslant -A$, $|y-b|<\varepsilon$ 都成立。

現在我們來研究基本變量連續變化(或者不斷增大或者不斷減小)同時始終保持有界的情形。到第四章裏我們將會知道，這種量 x 將無限逼近某一個常數 a，並且以 a 作為它的極限。如果量 x 是不斷增大的，則它一定是從小於 a 的值那一邊("左"邊)逼近 a 的，通常我們把這件事記作：$x\to a-0$，如果 x 不斷減小，則它常保持大於 a，從大於 a 的值那一邊("右"邊)逼近 a，我們通常寫作 $x\to a+0$，現在先來看第一種情形($x<a$, $x\to a-0$)。

這時"從過程的某一時刻起"這句話的意義顯然是："從變量 x 的某一個值 $a-\delta<a$ 起，對於它的一切更逼近 a 的值"(當然也小於 a)。簡單地說，即"對於一切滿足不等式 $a-\delta\leqslant x<a$ 的值 x"。因此斷語

$$\lim_{x\to a-0} y=b \text{ 或 } y\to b\ (x\to a-0)$$

的精確意義如下：無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總有這樣的一個正數 δ 存在，使得對於一切滿足不等式 $a-\delta\leqslant x<a$ 的值 x, $|y-b|<\varepsilon$ 都成立。

我們可以完全相仿地闡明斷語

$$\lim_{x\to a+0} y=b \text{ 或 } y\to b\ (x\to a+0)$$

的精確意義，得到的結果和上面是一樣的，只是不等式 $a-\delta\leqslant x<a$ 需要換成不等式 $a<x\leqslant a+\delta$。

這樣一來，對於數學分析中所需的一切基本類型的過程，我們都闡明了極限概念的精確意義。我們還要提醒一下，就是在第二章裏對一切類型的過程統一地探索到的全部結果與論證，對於我們極限過程的新的更精確的說法，當然還是完全有效的。這是因為這些新的說法並不與我們舊的定義抵觸，在一切情形下，都沒有超出舊定義的範圍，而只是對各種可能的情形給以更精確的規定罷了。

我們還要作一個補充說明。假設參與在某一個過程中的量 y 並不趨向於任何極限，而是無限地增大。例如，假定我們談到的是 $x\to a-0$

型的過程，那末我們當然就寫作

$$y \to +\infty \quad (x \to a-0).$$

但是這個寫法的精確意義究竟是什麼呢？按照講過的一切，我們可以毫無困難地回答這個問題：不論 $A>0$ 怎樣大，總可以找到這樣的一個 $\delta>0$，使得對於一切滿足不等式 $a-\delta \leqslant x < a$ 的值 x，$y>A$ 都成立。

以此作爲範例，讀者自己不難給出在我們討論過的任何類型的過程中，關係式 $y \to +\infty$ 與 $y \to -\infty$ 的應有的精確意義。對讀者來說，這是很好的練習題。[1]

§ 15. 極限概念的推廣

在前節中，我們充分討論了的極限過程的那兩種類型（序列的極限與函數的單邊極限），正像我們已經指出過的那樣，是數學分析的基礎。因爲以後我們會碰到的一切其他更複雜的類型，都能夠歸結到這兩種最簡單的形式。然而要想在一切情形下使這樣的簡化成爲可能，我們現在還必須把在一個已知過程中趨向於一個極限的量的概念稍加推廣。

我們從討論一個簡單的例子開始。這個例子給我們指出了這種推廣的必要性及其應循的途徑。假定我們所考慮的過程是一個矩形的周界 p（"基本"變量！）的無限減小，這裏，矩形的形狀可以在這過程中任意變化。因爲以 p 爲周界的矩形的每一邊要小於 $\frac{p}{2}$，所以周界爲 p 的矩形的面積 s 常小於 $\frac{p^2}{4}$。但是因爲 $p \to 0$ 時，顯然 $\frac{p^2}{4} \to 0$，所以在我們的過程中（即當 $p \to +0$ 時）面積 s 是一個無窮小量。因而我們可以寫作

$$s \to 0 \quad (p \to +0).$$

這個關係式的精確意義通常可以確定如下：不論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總有這樣一個 $\delta>0$ 存在，使得任何周界小於 δ 的矩形，其面積都小於 ε。

但是，這個例子本質上不同於我們迄今爲止討論過的一切。不同

---

[1] 參看 Б. П. 捷米多維奇的數學分析習題集，第一章，分析引論，習題 349—352。

之處在於當周界 p 給定時，矩形的面積 s 可以取無窮多個不同的值，因而 s 不是 p 的函數。因爲我們已經把 p 看作我們過程的基本變量，又因爲直到現在爲止我們總是把參與在已知過程中的量了解爲基本變量的函數，那末嚴格地按照我們的定義來說，我們就不可能把 s 作爲參與在我們過程中的量，更無從談到它趨向於什麼極限了。我們這個量的值，在過程的每一個給定的時刻(即對於量 p 的每一個值)，都不能確定。但是，不管怎麼樣，以下的事實却總是對的，那就是如果矩形的周界 p 選得充分小時，總可以使矩形面積 s 所有能取到的無窮多個值中的無論那一個都成爲任意地小。更精確地說，無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總可以找到這樣一個 $\delta>0$，使周界 $p<\delta$ 的任何矩形的面積 s，都滿足 $s<\varepsilon$。

因此，關於關係式

$$s\to 0 \quad (p\to +0)$$

通常所了解的精確意義，在我們這個例子中完全適用，雖然 s 不是 p 的函數。這樣一來，第二章中所講的一般理論的一切命題，都適用於像這一類的極限。我們只要把"參與在已知過程中的量"這幾個字的數學含義加以推廣，然後對這類廣義的量來定義趨向於極限這一概念就行了。我們所舉的例子，十分清楚地指出了這應當怎樣來做。首先，我們現在要把每個量 y 都叫做參與在已知過程中的量，只要對於基本變量 x 的任何給定的值(即過程的任何給定的時刻)量 y 可以取些怎樣的值是已知的。顯然，我們以前把 y 總算作是 x 的函數的規定，是我們現在比較廣義的規定的一個特殊情形。我們只要讓量 y 對於基本變量 x 每一個給定的值，所可能取到的那些值的集合，永遠只由唯一的一個數組成，就成爲我們的特殊情形了。現在爲了確定起見，假定我們的過程是 $x\to a+0$。在這個過程裏，斷語 $\lim y=b$(其中 y 是在我們推廣了的意義下的一個參與在這過程中的量)的精確意義如下：無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總可找到這樣一個 $\delta>0$，使得對於在 a 與 $a+\delta$ 之間的任何一個值 x，

以及關於該 x 值的任何一個可能的值 y，都永遠有下式成立：

$$|y-b|<\varepsilon.$$

假如這個條件滿足，我們就寫作

$$y\to b \quad (x\to a+0).$$

函數的雙邊極限 現在我們要講關於我們剛才引進的廣義極限概念的應用的一個重要例子。這個例子說明我們擴充後的理解在數學分析的最初階段就已經有用。

假定量 $y=f(x)$ 是另一個量 x 的函數，又假定量 y 的值可以任意逼近一個數 b，只要量 x 的值充分逼近另一個數 a（但 x 不等於 a）。現在我們已經熟習像這一類斷語的正確意義：無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總有一個 $\delta>0$ 存在，使得當 $0<|x-a|\leqslant\delta$ 時，$|y-b|<\varepsilon$ 永遠成立。用符號來記就是

$$y\to b \quad (|x-a|\to+0). \tag{1}$$

根據我們所用的那套符號，上面的寫法表示量 $|x-a|$ 是所討論的過程的基本變量，而量 y 在這過程中以數 b 爲極限。但是對應於基本變量 $|x-a|$ 每一個給定的值 $|x-a|=\alpha$，量 x 有兩個不同的值 $x=a+\alpha$ 與 $x=a-\alpha$，一般說來，也就有量 y 的兩個不同的值 $y=f(a+\alpha)$ 与 $y=f(a-\alpha)$。因此，對於基本變量的任一個值 α，量 y 可能取到兩個不同的值，因而不是這個基本變量的函數。在這裏，根據我們極限過程的廣義理解，就可以寫出關係式(1)，並聲稱：當 $|x-a|\to+0$ 時量 y 以數 b 爲極限。

不過，我們經常把 $|x-a|\to+0$ 的過程寫作 $x\to a$ 的形式，於是關係式(1)就應該改寫作

$$y\to b \quad (x\to a). \tag{2}$$

$x\to a$ 的寫法與以前的 $x\to a-0$ 和 $x\to a+0$ 不同，其目的在指出量 x 在給定的情形下逼近 a 時，並不一定是不斷地增大也不一定是不斷地減小，它可以改變它變化的方向，特別是它可以變得時而比 a 大，時而又

比 a 小。所以我們以上所描述的當 $x\to a$ 時量 y 的極限，通常稱爲函數的**雙邊極限**。

我們再提醒一下，關係式(2)的正確意義如下：**無論** $\varepsilon>0$ **怎樣小，總有這樣的一個** $\delta>0$ **存在，使得對於滿足** $0<|x-a|\leqslant\delta$ **的任何值** x，$|y-b|<\varepsilon$ **都永遠成立**。

我們還要提出以下這個重要的附註：**要想數** b **是量** y **當** $x\to a$ **時的雙邊極限，必須而且僅須兩個單邊極限** $\lim\limits_{x\to a+0} y$ **與** $\lim\limits_{x\to a-0} y$ **都存在，並且都等於** b。事實上，假定 $\varepsilon>0$ 是任意給定的。

$$\lim_{x\to a} y=b,$$

則對於充分小的 $\delta>0$，從 $0<|x-a|\leqslant\delta$ 可以推得 $|y-b|<\varepsilon$。但是如果 $a<x\leqslant a+\delta$，那末當然滿足 $|x-a|\leqslant\delta$，換句話說，滿足 $|y-b|<\varepsilon$。這就說明了 $y\to b(x\to a+0)$。完全同樣地可以證明 $y\to b\ (x\to a-0)$。反過來，假定已知當 $x\to a+0$ 與 $x\to a-0$ 時，都有 $y\to b$，於是，無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總可以找到這樣一個 $\delta_1>0$，當 $a<x\leqslant a+\delta_1$ 時，$|y-b|<\varepsilon$；又可以找到一個 $\delta_2>0$，當 $a-\delta_2\leqslant x<a$ 時，$|y-b|<\varepsilon$。如果用 δ 來記數 δ_1 與 δ_2 中較小的一個，則當 $a-\delta\leqslant x\leqslant a+\delta(x\neq a)$ 時，我們就得到 $|y-b|<\varepsilon$；這就證明了 $y\to b\ (x\to a)$。也就完全證明了我們的斷語。

這樣，我們已經看到，變量 x 由雙邊逼近極限 a 的過程，完全歸結到由單邊逼近 a ($x\to a+0$ 與 $x\to a-0$) 的情形。這是說明我們在 §14 中提出的一般意見的第一個例子。根據那個意見，數學分析中所考慮的一切類型的過程，都可以歸結到我們在那兒研究過的那兩種基本類型。

第四章　實數

§ 16. 建立實數一般理論的必要性

在已知過程的進行中取不同的值，是變量的特徵。每一個這樣的值都是一個數。比如說，當空氣的溫度從 5°C 上升到 10°C，則我們自然認爲在這個過程中，它逐漸通過從 5 到 10 之間的一切數。但是"一切數"是什麼意義呢？我們指的是哪些數呢？顯然不僅是整數：例如會有這樣一個時候溫度是 6.5°C 的。那末能否說是"一切整數與一切分數"呢？

一切整數與分數（正的、負的與零）組成所謂有理數集合。在算術與代數裏關於這些數的研究與運算已經詳細地處理過了。但是這些數是否已經夠用來測量一切在我們對外界的研究中所會碰到的量呢？這個問題對於數學與精確的自然科學來說是有很大的意義的。早在古希臘（大概是畢達哥拉斯學派）就已經有了卓越的發現，知道對很簡單的幾何作圖來說，就已經必須引進不是有理數所能夠精確測量的量。這類問題中最簡單的情形是大家都知道的：假如直角三角形的每一腰都等於單位長，則根據畢達哥拉斯定理，這個三角形的斜邊的長的平方應該等於 2。但容易證明平方等於 2 的有理數是不存在的❶。所以，如果我們只限於有理數，我們就不得不認爲我們所說的三角形的斜邊的長是不存在的。不言而喻，我們不能作出這樣的結論，因爲任何度量幾何都不可能建立在這樣的基礎上的。因而，我們不得不承認，客觀現實

---

❶ 假定有$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$，我們就應該得到 $p^2=2q^2$。令 $p=2^r p'$，$q=2^s q'$，其中 p' 與 q' 爲奇數。於是

$$p^2=2^{2r}p'^2,\ 2q^2=2^{2s+1}q'^2,$$

而等式 $p^2=2q^2$ 就有了矛盾，因爲左端含有 2 的偶次冪而右端則爲奇次冪。

本身不允許我們只限於有理數集合，而迫使我們增添一類新數，這種新的數我們稱之爲無理數。我們引進$\sqrt{2}$作爲第一個這樣的數，所謂$\sqrt{2}$就是平方等於2的數。其實，宣告引入新數並不是什麼難事，不過，如果就只是這樣引進一個新數完事，那是沒有多大意義的。如果我們希望引入的新數眞能成爲數系裏合格的一員，我們就首先應該確定它在數系中的地位，即確定究竟那些有理數小於$\sqrt{2}$，那些大於$\sqrt{2}$。其次我們還應該規定關於這些新數的一切運算（要注意我們還完全不知道例如$\sqrt{2}+1$，$3\sqrt{2}$，$1/\sqrt{2}$這樣的表達式有什麼意義）並且證明這些運算服從於在有理數上的運算一樣的規律（例如$\sqrt{2}+1=1+\sqrt{2}$）。這一切都是可以做到的，雖然需要付出大量的勞動（由於我們所提出的任務的重要性，值得我們付出這樣的勞動）。不過我們現在就算作這一切我們都已經做好了。但是在另外的場合，另外的幾何上或物理上的問題又要求我們引進平方等於3或5之類的新數了。每次都要引進一套像我們用來使$\sqrt{2}$成爲一個合格的數的說法，顯然是解決不了的問題。但就算我們找到了一種方法，用統一的說法一下子把所有自然數的平方根都合格地引入了數系（這無疑是可能的）。在補入了這些數之後，我們的數系仍舊是遠不完備的。如果我們要求一個立方體的稜長，已知其體積爲$2\,\mathrm{m}^3$，我們就不得不還要引入$\sqrt[3]{2}$。甚至於就算我們把任何有理數的任何次根都引入了數系，那也還不够的。一方面，我們要尋求的數，往往是某個已知方程的根；實際的考察告訴我們這樣的根應該存在，而理論上却又可以證明在我們上面已經有了的有理數與無理數中，還沒有這樣的根。於是我們又必須引入新數，把它直接定義爲我們方程的根。並且對於它我們又要進行像以前我們對$\sqrt{2}$所進行的一切。另一方面，最初等的幾何問題也會直接引起這一類的困難。在這方面，確定半徑爲1的圓面積的問題是大可注意的。大家都知道，我們確定這面積爲內接（或外切）正多角形的面積當邊數無限增加時的極限。我們的直覺觀念與我們的實際需要都迫使我們不

得不承認這個極限的存在是無可懷疑的。事實上難道我們能同意像圓這樣簡單的圖形會根本沒有確定的面積嗎？要是連像圓這樣日常碰到的圖形都無法測量它的面積，我們的幾何學又還能發生什麼作用呢？然而，近代數學已不可反駁地證明了，在我們前面所談到的一切數中，包括所有代數方程的根在內，是沒有這樣一個極限的。於是別無他法，為了圓面積的測量，我們又只好創造完全新的數，然後重新進行以前已經屢次提出的那套說法，把這個數作為合格的一員引入到我們業已很廣泛的數系中來。這個新數不是別的，就是衆所週知的數 π。

以上這些例子已經完全足够說明我們這樣的方法在理論上是不科學的，在實際上也是無法實現的。我們以上方法的要點是：當現有的數不足以解決新問題時，我們就對每一個這樣的新問題引入新數，找出它們在現有數系中的地位，規定並研究它們的運算法則，一言以蔽之，為了使它們真正成為合格的數而進行必要的一切。這個方法的不科學與不現實，充分具有說服力地說明了建立**無理數一般理論**的絕對必要性。必須製定一條產生無理數的一般原則，它的特殊情形就給出我們以上所討論的一切，它應該能够概括一切歷史上已知的這一類例子，並同時能够保證我們已經無需再來引進任何新的無理數。然後對於這種一般方法所產生的數必須在一般形式下引進一切必要的規定，使得在以後運用這些數時能够像在初等算術與代數中運用有理數一樣。祇有這樣的提法，才能算是用科學態度來對待我們所關切的問題。

全部這個工作當然不是數學分析（它只討論量的變化）的任務而是數論的任務。然而當這問題沒有解決的時候，數學分析不能得到鞏固的邏輯基礎。事實上，正如我們在本節開始時說過的，一切變量的值都是數；因此如果我們不先弄清楚近代數學究竟處理一些什麼樣的數，以及這些數的集合有些什麼樣的性質，我們甚至於根本不可能着手研究變量。在本章以後的各節中就要敍述一下這個數集合的近代理論的一個簡單輪廓。

§ 17. 連續統的建立

1. 當我們用普通的方法來近似地計算$\sqrt{2}$時，我們得到這個數的一串近似值:

$$a_0=1;\quad a_1=1.4;\quad a_2=1.41;\quad a_3=1.414;\cdots$$

這些值中的每一個都是有理數（有限的十進位小數），並且每一個大於它前面的一個（至少是等於它前面的一個）。這些數的平方趨向於數 2[1]:

$$a_n^2\to 2\quad(n\to\infty).$$

但數 a_n 不可能趨向於任何有理的極限。因爲如果不然，假定有那樣的極限 r, 我們知道從 $a_n\to r$ 可以推出 $a_n^2\to r^2$, 但因爲 $a_n^2\to 2$, 所以 $r^2=2$。這就表示可以有一個有理數 r，它的平方等於 2, 但我們知道這是不正確的。

因此，現在擺在我們面前的是這樣一個序列:

$$a_0,\,a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n,\,\cdots,\tag{1}$$

其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 都是我們已經知道的數；這個序列是遞增的，換句話說，永遠有 $a_{n+1}\geqslant a_n$；又同時這個序列沒有有理數的極限。當我們引入新數(無理數)$\sqrt{2}$（按定義其平方等於 2)時，我們好像塡補了有理數域裏存在的一個空白：我們新數的使命，是要充任在有理數集合中並不存在的遞增序列(1)的極限。

引進無理數 π 時的情况和我們剛才描寫的情况十分相彷。設半徑

---

[1] 事實上，數 a_n 中的每一個都有以下的性質，就是假如在它的十進位的最後一位數上增加 1，得到的數的平方就大於 2。所以

$$a_n^2<2<\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2,$$

因而，

$$0<2-a_n^2<\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2-a_n^2=\frac{2a_n}{10^n}+\left(\frac{1}{10^n}\right)^2\to 0\quad(n\to\infty).$$

爲1的圓的內接正 n 角形的面積爲 s_n，則數

$$s_3, s_4, s_5, \cdots, s_n, \cdots \tag{2}$$

組成一個遞增序列，而數 π 在幾何上就確定爲這個序列的極限。這裏情況比較有些複雜，因爲一般來說，面積 s_n 不是用有理數來表達，而是用無理數來表達的。不過，這些數都是最簡單的無理數，不難用自然數的方根表達出來。因此我們可以認爲面積 s_n 是我們已經很熟習的數。這就表示序列(2)不但在有理數的範圍內沒有極限，而且在面積 s_n 所屬的較廣的一類數內也沒有極限。再引入我們的新數 π，把它充作遞增序列(2)的極限，就好像在我們直到現在爲止所已知的數的總體中又塡補了一個空白，因爲這個極限分明不是在我們前此所已知的數中的。

現在假定給定了任意一個**有理數**的遞增序列

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots \quad (r_{n+1} \geqslant r_n). \tag{3}$$

我們首先應當分別兩種情形：一種情形是 r_n 與 n 同時無限增大，另一種情形是有這樣一個正數 C 存在，對於任何 n，我們都有 $r_n < C$。在第一種情形量 r_n 當 $n \to \infty$ 時是無窮大量，這就說明它不可能趨向於任何極限。因此我們集中我們的注意力於第二種情形，而且要記住目前除了有理數外還沒有任何其他的數可給我們利用。在這種情形下，序列(3)是**有界的**。可能碰巧序列(3)以有理數 r 爲極限。例如序列

$$r_1 = 1 - \frac{1}{1}, \ r_2 = 1 - \frac{1}{2}, \ \cdots, \ r_n = 1 - \frac{1}{n}, \cdots$$

是遞增的，有界的而且以數1爲極限：

$$r_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \ (n \to \infty).$$

但也有可能一個有界的遞增序列沒有任何有理的極限，例如，逼近數值 $\sqrt{2}$ 的序列(1)，顯然是遞增而且有界的(一切 $a_n < 2$)，但同時，如我們所知，却沒有有理的極限。

現在我們規定(跟我們引進無理數 $\sqrt{2}$ 時一樣)**每當我們遇着一個**

有理數的有界遞增序列(3)沒有有理的極限時，我們就添加一個新的無理數來作爲它的極限❶。我們就這樣來建立起一個產生無理數的一般原則。採用這個原則之後，我們就一下子確定了所有的無理數。以後我們會看到，這樣確定的無理數的總體，的確具有某種完備性，即除了按照我們的規定所確定的新數而外，我們以後已經不用再引進任何新的數了。

2. 例. 設 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$，於是一切數 a_n 都是有理的$\left(a_1=2,\ a_2=\frac{9}{4},\ a_3=\frac{64}{27}\ 等等\right)$。我們要證明這個數列 a_n 是遞增的而且是有上界的。根據二項式公式，我們可以得到

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\times\frac{1}{n^k}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \qquad (4)$$

同樣，

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right). \qquad (5)$$

比較公式(4)與(5)的右端，我們看到公式(5)的和中的每一項都大於公式(4)的和中的對應項，因爲把 n 換作 $n+1$ 時，(4)式中每個括弧內的值顯然要變大；並且(5)式中還多出相當於 $k=n+1$ 的一項。所以

❶ 在本節之末，我們將證明這個數實際上滿足極限概念的定義。

$$a_{n+1}>a_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

這就說明數列是 a_n 遞增的。其次，對於任意的 n 從公式(4)可以得到：

$$a_n\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!},$$

又因爲當 $k\geqslant 1$ 時顯然有 $k!\geqslant 2^{k-1}$，所以

$$a_n\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}<1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=3;$$

這就證明了數列 a_n 同時也是有上界的。所以，根據我們採用的產生新數的原則，我們應當認爲這個序列有一個(有理的或無理的)極限：

$$\lim_{n\to\infty} a_n=e.$$

更進一步的分析可以證明數 e 是一個無理數❶，不過在這裏我們不能講到了。我們以後會看到，這個數 e，與數 π 一樣，是數學分析中最重要的數之一。我們將在本教程的許多章節裏遇到它。數 e 的十進位小數的開始幾位數字是：

$$e=2.71828\cdots.$$

不言而喻，我們的規定還只是在無理數一般理論的建設事業中的第一步。一切有理數與一切根據我們的原則產生的無理數總稱爲實數。實數全體組成的集合叫做連續統。這個連續統就是一切"連續地"變化着的量所能取到的"值"的總體。連續統理論的基本問題可以描述如下：1)"安排"實數集合的"順序"，即確定在什麼條件下兩個實數之一大於、等於或小於其他一個；2)確定任何實數間的一切代數運算；3)建立這些運算的法則。所有這些問題都被近代數論解决得十分滿意，在我們擴大了的數域裏一切運算都絲毫不差地服從於像在有理數域裏同樣的法則。而且這些運算的可能性在這裏變得更廣了：例如在實數域裏我們可以開任何數的任意正整數次方根(負數的偶次根要除外，因

❶ 換句話說，數列 a_n 沒有有理的極限。

爲它得到的不是實數而是虛數，我們在這裏完全不考慮虛數)。在數學分析的教程裏，我們不可能分出地方來充分發揮這個理論，不過我們必須把它的結論取來作爲我們以後的研究的現成的基礎。所以關於這項問題，我們只限於作一些簡略的註釋。對連續統的基本理論不感興趣的讀者，可以略去本節的 3, 4, 5 各段而直接轉到第 6 段。

3. 設遞增序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 確定實數 α。若從某一指標 k，全部數 r_n 都相等，也就是說 $r_k=r_{k+1}=r_{k+2}=\cdots=r$，則顯然，$\alpha=r$。故 α 是有理數。我們將稱爲這樣的序列 r_n 是穩定的。顯然，在 α 是無理數的情形，確定這個數的序列 r_n 總是非穩定的；若 α 是有理數，則序列 r_n 可以取得是穩定的 $(r_n=\alpha, n=1, 2, \cdots)$，也可以取得是非穩定的 $\left(r_n=\alpha-\frac{1}{n},\ n=1, 2, \cdots\right)$。因此，在所建立的連續統下，可以限制只考慮非穩定的遞增有理數序列。

設有兩個非穩定遞增而且有界的有理數列

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots, \tag{r}$$

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots, \tag{s}$$

它們的每一個都產生一個實數，可能是有理的；也可能是無理的。假設這兩個數是 α[對應於序列(r)]與 β[對應於序列(s)]。我們必須來解決 $\alpha<\beta$、$\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$ 三種可能關係中那一個成立的問題。

如果對於序列(r)的每一個數 r_n，總可以找到序列(s)的一個數 s_m，使 $s_m\geqslant r_n$(因爲 r_n 與 s_m 都是有理數，所以這個不等式的意義是明確的)，我們就說數列(s)**勝過**(超過)數列(r)。我們可以分成四種情形來看：

1) (s)勝過(r)，同時(r)勝過(s)；

2) (s)勝過(r)，但是(r)不勝過(s)；

3) (r)勝過(s)，但是(s)不勝過(r)；

4) (s)不勝過(r)，同時(r)不勝過(s)。

不難看出，4) 的情形是不可能的。事實上，如果(s)不勝過(r)，就一定可以找到一個 r_n，使得對於任何 m，都有 $s_m<r_n$；但這樣顯然(r)就勝過(s)。因此，我們只剩下三種情形需要考慮了。在 1) 的情形我們規定 $\alpha=\beta$，在 2) 的情形我們規定 $\alpha<\beta$，在 3) 的情形我們規定 $\alpha>\beta$。

對於任何兩個實數，究竟三種關係中的那一個應該成立，按照這樣的規定就完全確定了。容易驗證，當α與β都是有理數而序列(r)和(s)嚴格增加时，我們所規定的等與不等的定義與通常的規定完全一致，當然，這是應當如此的。

其次，我們還必須驗證，這裏採用的實數的等與不等的定義，具有在有理數的情形爲大家所熟知的一切必要的性質。例如可遞性，即從$\alpha\leqslant\beta$與$\beta\leqslant\gamma$可以推出$\alpha\leqslant\gamma$。對於有理數來說這個性質是衆所週知的，但是對於任何實數來說就必須根據我們所建立的等與不等的定義來加以證明。這個證明是很容易的：只要先驗證勝過關係的可遞性（如果(s)勝過(r)，而(t)又勝過(s)，則(t)勝過(r)）就行了。

4. 建立了等與不等的必要性質之後，連續統的理論就應該轉到實數的運算的定義了。例如，怎麼樣確定兩個實數之和$\alpha+\beta$呢？假定α由序列(r)確定，β由序列(s)確定，於是

$$r_1+s_1,\ r_2+s_2,\ \cdots,\ r_n+s_n,\ \cdots \qquad (t)$$

顯然是一個遞增而且有界的有理數列。我們很自然地把它所產生的實數γ叫做數α與β之和$\alpha+\beta$。很容易驗證，當α與β都是有理數時，這個和的定義與通常的定義一致。同樣也很容易證明，對於這個加法定義，一切在有理數情形爲我們所熟知的運算法則也都成立。例如，加法的交換律（即$\alpha+\beta=\beta+\alpha$）就可以直接從加法定義推出來，因爲我們交換序列$(r)$與$(s)$的地位時，顯然我們仍舊保持序列$(t)$不變。

我們可以用同樣的方法確定實數的其他運算，並且證明這些運算也有對於有理數來說是熟知的那些性質。以下我們不再討論實數的減法、乘法與除法，以及實數的正整數次乘方與正整數次開方。我們只就表達式a^x，其中$a>0$而x是任意的實數的定義（指數函數的定義）略加討論。爲了確定起見，不妨假定$a>1$。當x是有理數時，a^x可以認爲是確定了的，並且它是x的一個遞增函數。事實上，如果$r=\dfrac{p}{q}$與$r'=\dfrac{p'}{q}$是兩個有理數，又設$r<r'\ (p<p')$，於是$a^{\frac{1}{q}}>1$，從而

$$a^r=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p<\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p'}=a^{r'}.$$

現在假定實數 α 是由一個遞增而且有界的有理數列(r)所確定的。於是序列

$$a^{r_1}, a^{r_2}, \cdots, a^{r_n}, \cdots$$

顯然也是有界的，而且根據剛才證明的結果，也是遞增的。因而它自己也確定一個實數，很自然地，我們把這個實數就叫做 a^{α}。用這方法，指數函數 a^x 就對於任意一個實數 x 都有了定義。很明顯，我們已經順便指出了這個函數(當 $a>1$ 時)還是遞增的(當 $a<1$ 時，是遞減的)。用類似的方法也可以確定對數函數。

從這兩個定義，不難推出這些函數對於有理的變數值所熟知的性質，對於任何實變數值仍然成立；例如在一切情形下，我們都有：

$$a^{x+y}=a^x a^y,\ \lg_a(xy)=\lg_a x+\lg_a y,$$

等等。

在我們的教程裏，我們不再更詳細地討論這一切問題了。

5. 只有一點還需要解釋一下 當我們以前敘述實數產生的一般原則時，我們總是指出：遞增而且有界的序列

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots \qquad (r)$$

所產生的數 α，是作爲這個序列的極限的。要想這個形式的敘述能夠真正成爲我們以後進行研究時的實際工具，顯然我們還應當證明在事實上的確是這樣；關於這一點在實數的算術建立之後已經可以做到(事實上也必需能做到)。我們顯然只要證明，無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，對於一切充分大的 n，我們都有：

$$\alpha-r_n<\varepsilon.$$

我們先要證明下述關於有理數列的輔助命題。

引理. 設 (r) 是一個遞增而且有界的有理數列。於是，無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，有這樣一個號碼 n_0 存在，使得當 $m>n_0$, $n>n_0$ 時，我們永遠有 $r_n-r_m<\varepsilon$。

證明. 假定引理的結論不成立，換句話說，有這樣一個 $\varepsilon>0$ 存在，

使不等式

$$r_n - r_m \geqslant \varepsilon$$

對於無論怎樣大的 n 與 m 都還可以成立。那末，顯然，無論自然數 k 怎樣大，總有 k 對號碼 $(m_i, n_i)(1 \leqslant i \leqslant k)$ 使得

$$m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots < m_k < n_k,$$

並且

$$r_{n_i} - r_{m_i} \geqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant k);$$

但是在這種情形下，就有：

$$r_{n_k} - r_{m_1} = (r_{n_k} - r_{m_k}) + (r_{m_k} - r_{n_{k-1}}) + (r_{n_{k-1}} - r_{m_{k-1}}) + \\ + (r_{m_{k-1}} - r_{n_{k-2}}) + \cdots + (r_{n_1} - r_{m_1}) \geqslant k\varepsilon,$$

這是因爲第一、三、五、等等括號裏的數都不小於 ε，而二、四、六等等括號內的數又都不是負數的緣故。由此可見

$$r_{n_k} \geqslant k\varepsilon + r_{m_1}.$$

因爲 k 可以任意大，因而序列 (r) 的項中將有任意大的數，這與它的有界性相抵觸。這就證明了我們的引理。

現在設 ε 是任意一個正有理數。根據上面的引理，知道當 k 充分大時，對於任意的 n，都有 $r_n - r_k < \varepsilon$，因此序列

$$\varepsilon, \varepsilon, \cdots, \varepsilon, \cdots \qquad (\varepsilon)$$

勝過序列

$$r_1 - r_k, r_2 - r_k, \cdots, r_n - r_k, \cdots,$$

而後面這個序列顯然產生實數 $\alpha - r_k$。又因爲序列 (ε) 產生數 ε，故根據實數的不等式的定義，我們知道當 k 充分大時，

$$\alpha - r_k < \varepsilon.$$

這樣，對於有理數 ε 已經證明了所要的結果。但對於任一實數 $\varepsilon > 0$ 總可找到一個有理數 $\varepsilon' > 0$ 小於 ε，因此所要求的結果對於任何實數 $\varepsilon > 0$ 同樣也證明了。

我們還要注意，我們所採用的產生無理數的一般原則絕非唯一可

能的。在前世紀的後半葉，建立實數一般理論的必要性已經充分顯露時，好幾種這樣的理論幾乎同時建立起來，並且每一種理論都有它自己的產生原則。後來弄清楚了所有這些理論在邏輯上其實是彼此相同的，因而它們之間的選擇，應當取決於解釋與應用的方便，並不是由於原則見解上有什麼出入。

6. 我們這裏進行的數集合的擴充，如所周知，在數的概念的發展史中，已經決不是第一次了。在學習算術的時候，我們都是從認識自然數開始的，然後添上數零，負數與分數。於是相繼擴充的結果，組成了有理數集合。現在，我們產生無理數的原則是一下子給有理數系添上一切的無理數，這樣就把有理數系擴充到了整個實數系——即擴充到了連續統。衆所週知，以前的一切擴充，都在極大程度上受到這樣一種願望的刺激，即希望使某些在舊的數域內不是永遠可以進行的運算能夠變成可以通行無阻。例如零與負整數的引進就可以使減法運算變成通行無阻。分數的引進對除法的運算有同樣的作用(除去用零來除。順便提一下，在我們新的實數域內仍舊不能用零來除)。無理數的引進在最初也是出於要使開方運算能夠通行無阻的迫切希望。在數學中之所以產生這種願望（即要使那些在已知的數域中不能通行的運算能夠廣泛通行的願望)當然不是由於一種抽象嗜好，愛好形式上的完備（時常有人會這樣想)，而實在是由於實際上的迫切要求。本章開始時引進的那些例子可以使我們很好地體會這一點，正是我們的實際活動不能滿足於這樣的數集合：它當中竟然找不到數來表達邊長爲 1 的正方形的對角線的長度或者半徑爲 1 的圓的面積。

仔細地考察一下我們產生無理數的原則，不難看出這種新的擴充也還是由於這樣一個迫切的願望，要使某種在有理數域內還不能無阻礙地施行的運算能夠永遠通行。這個運算就是有界遞增數列極限的形成。這個運算已經不是算術性質的。算術運算的特徵首先在於它永遠是在有限的一羣數上進行，而現在這個運算需要給出一個無限的數列，

然後由這些數全體來形成一個稱為這個序列的極限的新數。這是一個**分析的運算**,是數學分析的第一個同時也是最簡單的一個運算。

數域的擴充既然是按照要保證某種運算的通行無阻的計劃來做的,那就只有當在新的擴充後的域中這種運算能夠永遠通行,才能算達到了目的。所以在我們的情形,我們首先還應當驗證,在實數域內,的確**每一個有界遞增序列都有極限**。而這是很容易證明的。事實上,假定

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots \tag{6}$$

是這樣的一個序列,即 $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n$ 對任何 n 都成立, 而且存在一個數 C 使對於任何 n, 都有 $\alpha_n < C$。這兒一切 α_n 都是任意的實數。

假如從某一個地方開始,序列(6)的一切數都彼此相等,那末這些數的公共值顯然就是序列(6)的極限。因此我們不妨一開始就除去這個情形,而假定序列(6)的數中有無窮多個彼此不相同的數。設序列(6)的這些彼此不同的數按照其增大的順序是

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \cdots \ (\beta_{n+1} > \beta_n).$$

用 r_n 來記 β_n 與 β_{n+1} 間的任一個有理數❶,於是

$$\beta_1 < r_1 < \beta_2 < r_2 < \cdots < \beta_n < r_n < \beta_{n+1} < \cdots.$$

有理數列 r_n 顯然是遞增的同時又是有上界的。 根據我們所採用的產生原則,它有一個(有理的或無理的)極限 α。但因為 $r_{n-1} < \beta_n < r_n$, 所以根據 § 11 的定理 10 也有 $\beta_n \to \alpha (n \to \infty)$。而序列(6)是由同樣的這些數 β_n 組成的,只不過一般說來它們的每一個要重複若干次。因此也有 $\alpha_n \to \alpha (n \to \infty)$。

這樣一來,我們從有理數域擴充到實數域(連續統)時所持的目的可以認為是達到了:我們用來作為數學分析的基本運算的那個新運算,即從有界的遞增序列到它的極限的過程所構成的那個運算,在擴充的數域中已經可以通行無阻了。

連續統的這種性質對於數學分析的嚴格的邏輯構造起着奠基的作

❶實數的算術理論指出,在任何兩個實數之間總有無窮多個有理數存在。

用，我們在以下幾節中就可以清楚地看出來。

§ 18. 基本引理

根據我們剛才建立的連續統的基本性質，可以作出許多深刻的結論，這些結論更完全也更細緻地，刻畫着實數集合的結構及其統治規律。不過對於我們來說，感興趣的只是其中對數學分析的建立有最大應用的那些結論。本節中我們就要闡明若干這樣性質的定理。我們管這些定理叫做"基本引理"，因為當應用連續統性質來建立分析理論時，最常碰到的任何一種方案中，這些定理都是少不了的。這些引理我們以後經常要引用，所以對它們的切實精通可以使我們在以後的解釋中，有許多地方得以大大地縮簡。

滿足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切實數 x 的總體，稱為一個區間，其中 a 與 b $(a<b)$ 是兩個任意的實數。按照這個定義，每一個區間我們都算作是包括兩"端" a 與 b 在內的。這種情形，有時我們更確切地把它叫做一個"閉"區間。另外，不等式 $a<x<b$（不包括它的兩端）所確定的區間則叫做"開"區間。我們說一串區間

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots \qquad (1)$$

作成一個區間套，是指 1) 對於任意的 n，區間 Δ_{n+1} 的一切點都屬於區間 Δ_n（記作 $\Delta_{n+1}\subset\Delta_n$），2) $\Delta_n\to 0\ (n\to\infty)$，這裏 Δ_n 同時又代表所記區間的長。

引理 1. （區間套定理）。假如(1)是一個區間套，則必定有唯一的一個數 α 存在，屬於一切區間 Δ_n。

證明. 用 a_n 與 b_n 分別代表區間 Δ_n 的左右兩端。於是，顯然有，$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots a_n\leqslant\cdots$，而且對於任意的 n，$a_n<b_1$。因此，數列 a_n 遞增而且有上界，這就說明極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 存在。現在假定 k 是任一個自然數。如果 $n>k$，則區間 Δ_n 整個屬於區間 Δ_k，所以 $a_k\leqslant a_n\leqslant b_k$。現在讓 $n\to\infty$，而 k 保持固定。由於 $a_n\to\alpha$，根據 § 11 的定理 9，就得出:

$$a_k \leqslant \alpha \leqslant b_k,$$

這就是說，α 屬於區間 Δ_k；但因為 k 是任意的，所以 α 屬於給定的區間套的一切區間。要想證明這個數的唯一性，我們假定另有第二個數 $\beta > \alpha$ 也屬於一切區間 Δ_n。於是這些區間的每一個的長都應該不小於 $\beta - \alpha$，而這與 $\Delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ 的條件矛盾。於是引理 1 得到了證明。

假定給定了一組（有限多個或無窮多個）區間 (S)。如果某區間 Δ 的每一個數，都在組 (S) 的至少一個區間的內部❶，我們就說組 (S) **蓋住了**區間 Δ。

引理 2. （有限覆蓋定理）。如果一組區間 (S) **蓋住了**區間 Δ，則**從 (S) 中一定可以選出一組有限個區間同樣也蓋住了區間 Δ。**

證明. 為了簡單起見，我們說一個區間 δ 有有限覆蓋，只要從區間組 (S) 中能選出一個有限區間組來蓋住 δ。我們用反證法來證明引理 2，即假定區間 Δ 沒有有限覆蓋，再設法找出矛盾。分區間 Δ 為兩半，如果兩半都有有限覆蓋，那末顯然整個區間 Δ 也就有有限覆蓋。但因 Δ 已假定沒有有限覆蓋，所以兩半中至少有一半沒有有限覆蓋，把這一半記作 Δ_1（假如兩半都沒有有限覆蓋，我們就隨便取一個作為 Δ_1）。我們再把沒有有限覆蓋的區間 Δ_1 分成兩半，而用 Δ_2 來記其中沒有有限覆蓋的一半。顯然，我們可以無限制地繼續這種步驟，因而得到一串區間 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots$，其中沒有一個區間可以有有限覆蓋。這一串區間顯然組成一個區間套。因此根據引理 1，有一個數 α 屬於這一切區間。因為 α 屬於區間 Δ，而 Δ 為 (S) 所覆蓋，所以 α 至少在 (S) 的某一個區間 Δ^* 的內部。但是每一個區間 Δ_n 都包含數 α，又因為當 n 無限增大時 Δ_n 之長趨向於零，所以當 n 充分大時，區間 Δ_n 將整個地包含在區間 Δ^* 內（圖 9）。這就是我們所要找的矛盾：

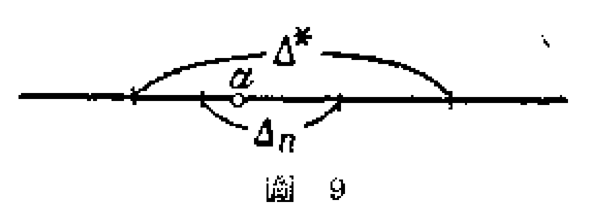


圖 9

❶ 有必要說明一下下述條件的重要性，即務必區間 Δ 的每一個數都真正是在 (S) 的某一個區間的**內部**，而不能只是屬於它；在後一種情形下，引理 2 並不成立。

一方面根據 Δ_n 的定義它沒有有限覆蓋，而另一方面只需 (S) 中的一個區間 Δ^* 就蓋住了它。這就證明了引理 2。

現在我們要來引進一個數集合的確界的概念，這是一個十分重要的新概念。實數集合 $\mathscr{M}$ 稱為是有上界的，假如能够有一個數 C 使集合 $\mathscr{M}$ 的一切數都不大於 C。則數 C 稱為 $\mathscr{M}$ 的上界[1]。例如一切負數所成的集合是有上界的（可取 0 或任何正數作為 C），而一切正數所成的集合就沒有上界。類似地，一個集合 $\mathscr{M}$ 稱為是有下界的，是指能够有一個數 C 使集合 $\mathscr{M}$ 的一切數都不小於 C。則數 C 稱為 $\mathscr{M}$ 的下界[1]。有上界又有下界的集合簡稱為有界集合。

我們把數 β 叫做集合 $\mathscr{M}$ 的上確界，假如在該集合中沒有比 β 大的數，但無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總有比 $\beta-\varepsilon$ 大的數。類似情形，我們稱數 α 為集合 $\mathscr{M}$ 的下確界，假如在該集合中沒有比 α 小的數，但無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總有比 $\alpha+\varepsilon$ 小的數。顯然上確界是集合 $\mathscr{M}$ 中沒有一個數能够超過的那些數中的最小的一個。類似的說法對下確界也成立。

例. 平方小於 2 的正有理數所成的集合有下確界 0 與上確界 $\sqrt{2}$。

一般情形下，集合 $\mathscr{M}$ 的上確界或下確界可以屬於該集合，也可以不屬於該集合。一個區間的上確界與下確界顯然就是它的兩端並且都屬於該區間；反之，在我們剛才所舉的例中考慮的集合則既不包含它的下確界（因為它不是正數）又不包含它的上確界（因為它不是有理數）。

沒有上界的集合顯然不能有上確界，因為沒有一個數 β 能使這個集合的一切數都小於它。但下面的事實對分析來說具有十分重大意義，即相反地，有上界的集合就一定有上確界（而且是唯一的）。類似地，有下界的集合一定有唯一的下確界。這個關於有界集合的確界存在的

---

[1] 原書沒有使用這個術語"上界"（"下界"），連這句話都是譯者添上的，這樣做對以後有很大方便。譯者註。

(絕非自明的)定理是連續統的最重要的性質之一。譬如有理數的總體就沒有這個性質，這是不難知道的；例如我們剛才那個例子所談到的集合雖然有上界，但在有理數域中就沒有上確界。

這個定理的證明，對於上確界與下確界是相仿的，所以以下我們只討論這兩種情形之一。

引理 3. (有界集合的確界存在定理)。有上界的集合 $\mathscr{M}$ 有唯一的上確界。

證明. 如果一個區間，它至少含有集合 $\mathscr{M}$ 的一個點，而在它的右邊却再也沒有這個集合的點時，我們就說這個區間是正則的。不難證明，正則區間的兩半中必有一半是正則的。事實上，如果右半區間至少含有集合 $\mathscr{M}$ 的一個點，那末顯然這個右半區間是正則的；如果右半區間已不含集合 $\mathscr{M}$ 的點，則左半區間就是正則的。

現在假定 a 是集合 $\mathscr{M}$ 的任何一個數，而 b 是集合 $\mathscr{M}$ 的任意一個上界。於是區間 $(a, b)=\Delta_1$ 顯然是正則的；設 Δ_2 是它的兩半中正則的那一半；Δ_3 是區間 Δ_2 的兩半中正則的那一半；一般設 Δ_{n+1} 是 Δ_n 的正則的那一半 $(n=1, 2, \cdots)$。於是區間 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots$ 組成一個區間套，因而根據引理 1 有唯一的公共點 β 存在。現在我們要證明 β 就是集合 $\mathscr{M}$ 的上確界。事實上，我們首先可以證明 β 的右邊已經沒有集合 $\mathscr{M}$ 的點了；假如不然，設有點 $\gamma>\beta$ 還屬於集合 $\mathscr{M}$。因為區間 Δ_n 中每一個都包含點 β，則也應該包含 γ，因為如果它終止在 γ 的左邊，它的右邊就有集合 $\mathscr{M}$ 的點 γ，就不成其為正則的了。因此，每一個區間 Δ_n 都包含 β 與 γ，從而它們的長都不小於 $\gamma-\beta$；但這是不可能的，因為 $\Delta_n\to 0(n\to\infty)$。所以 β 的右邊已經沒有集合 $\mathscr{M}$ 的點了。

其次，設 ε 是任意一個正數，則對於充分大的 n 可以使得 $\Delta_n<\varepsilon$。又因為 Δ_n 包含 β，所以區間 Δ_n 的一切點都位於 $\beta-\varepsilon$ 的右邊。但由於區間 Δ_n 的正則性，它至少包含集合 $\mathscr{M}$ 的一個點，從而這個點必須在 $\beta-\varepsilon$ 的右邊。所以，無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，總可以找到集合 $\mathscr{M}$ 的點位於

$\beta-\varepsilon$ 的右邊。這就表示 β 具有上確界的第二個性質，因而它的確是集合 $\mathscr{M}$ 的上確界。這樣一來，上確界的存在就證明了。至於同一集合不能有兩個不同的上確界差不多是顯然的事：假定有兩個不同的上確界 β_1 與 β_2（$\beta_1<\beta_2$），則根據確界 β_1 的第一個性質，不可能有集合 $\mathscr{M}$ 的數位於 β_1 與 β_2 之間，但根據確界 β_2 的第二個性質這樣的數又非存在不可，這就造成了矛盾。因此，引理 3 已經完全證明。

§ 19. 極限理論的完成

我們已經在第二章中建立了極限的基本理論。但這個理論的若干重要命題，只有在更精確的基礎上才能夠建立起來。現在，當我們建立了連續統並研究了它的性質以後，我們已經有了這樣的基礎。所以在這一節裏我們要對極限理論作一些補充。

1. 首先我們要在較廣的範圍內再來研究一下有界的遞增變量的變化情形。假如量 a_n 是有界的遞增實數序列的一般項，則根據 § 17的最後一個定理，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。但是我們已經知道，數列只不過是過程的若干重要的數學類型之一而已。假如我們有一個過程，不管它屬於那一種類型，我們很自然地把參與在這過程中的量 x 叫做是**遞增的**，只要對於過程的任何兩個時刻，它在較晚時刻的值不小於它在較早時刻的值。我們說量 x 在一個給定的過程中是**有上界的**，是指有這樣一個常數 C 存在，使得從過程的某一時刻起，$x<C$ 永遠成立。顯然，我們在 §17 之末所考慮的有上界的遞增序列是上面這種有界的遞增的量的特殊情形。現在我們要證明在 § 17 最後對這個特殊情形所證明的定理，對於一般情形仍舊是對的。

定理 1. **每一個有上界的遞增的量 x 一定有極限。**

證明. 因為量 x 是有上界的，所以有這樣一個常數 C 存在，使得 $x<C$ 永遠成立。由此可見，量 x 所取的值組成的集合 $\mathscr{M}$ 是有上界的，因而根據 § 18 的引理 3，它有一個上確界 β。假定 ε 是一個無論怎樣

小的正數。根據上確界的第二個性質，在集合$\mathscr{M}$中一定可以找到一個數(卽x或早或晚取到的一個值)，它大於$\beta-\varepsilon$。又因爲量x還是遞增的，這個值之後（卽時刻較晚）的一切值也要大於$\beta-\varepsilon$。而另一方面，根據上確界的第一個性質，集合$\mathscr{M}$的一切數都不能超過β。因此，從某一個時刻開始，我們永遠有：

$$\beta-\varepsilon<x\leqslant\beta,$$

由此就得出：

$$|x-\beta|<\varepsilon;$$

由於數ε可以任意小，這就說明了在給定的過程中$x\to\beta$。定理1於是得到了證明。

顯然，這個結果對於有下界的遞減的量同樣也是成立的。

到現在爲止我們把一個量x在給定的過程中叫做是**遞增的**，是指它在較晚時刻的值x_2總是不小於它在較早時刻的值x_1：$x_2\geqslant x_1$。因此，遞增的量在過程的進行中或者增大，或者保持以前的值，總之它決不減小；因此在一般情形下，自然應該說這樣的量是**不減**的，而保留"遞增"的稱號給那種永遠是$x_2>x_1$沒有等號成立的量。例如隨量x的逐漸增大，量$4x^3$是遞增的，而量$[x]$(參看§4例1)則只是不減的。當然，一切遞增的量同時也是不減的量，但是其逆並不成立。完全類似地，我們說量x是**遞減的**，是指永遠有$x_2<x_1$；說量x是**不增的**，則只要求永遠有$x_2\leqslant x_1$。一切不減的與一切不增的量都稱爲是**單調**的。定理1的一般敍述因此是：**單調變量在它變化的那個方向有界時就一定有極限。**

2. 現在我們要轉到一個新的問題。我們剛才已經證明了單調變量在相應方向的有界性是極限存在的必要充分條件。在一般情形當所研究的量的變化不單調時，常常也需要知道在給定的過程中這個量有沒有極限。事實上，在一般情形下，這樣的必要充分條件還是存在的，並且，我們以後就會知道，它具有很大的理論價值。我們現在就來一般地論證這一點。

定理 2. (極限存在的準則) 在給定的過程中變量 x 趨向於一個極限的必要充分條件是：無論正數 ε 怎樣小，總有這樣一個時刻，在它以後，量 x 的任何兩個值之差都永遠小於 ε。

證明. 我們把充分性的證明分爲三段。

1. 根據定理的條件可知，在我們的過程中一定有這樣一個時刻，使得在它以後，量 x 的任何兩個值之差都小於 1。假定在這個時刻，$x=x_0$，於是在它以後，量 x 滿足：

$$x_0-1<x<x_0+1.$$

因此，量 x 從這個時刻起所取的值組成的集合 $\mathscr{M}$ 整個包含在以 x_0-1 與 x_0+1 爲兩端的區間 Δ 內。

2. 如果不管我們怎樣選定過程的一個時刻，量 x 在這個時刻以後總還要取到屬於某一個區間 δ 的值，我們就叫這個區間 δ 是一個正則區間，(這個意思可以簡單地表達如下：正則區間包含着量 x 的任意後面的值)。顯然 1) Δ 是正則區間，2) 如果已知一個區間是正則的，則把它分成兩半後，至少有一半也是正則的。後一個性質使我們可以用我們已經習慣的方法，來從 Δ 着手作出一個區間套

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots,$$

這裏，每一個區間都是前面一個的正則的一半。根據 § 18 的引理 1，這一切區間有一個公共點存在，我們把它記作 a。

3. 最後我們要證明 $\lim x=a$。假設 ε 是任意一個正數。假定 n 已經充分地大使得 $\Delta_n<\frac{1}{2}\varepsilon$。固定我們過程的這樣一個時刻，使得從它以後量 x 的任何兩個值之差都小於 $\frac{1}{2}\varepsilon$。由於區間 Δ_n 的正則性，在 Δ_n 裏，可以找到量 x 在這個固定時刻以後所取的值 x_1。於是對於任何一個在這個固定時刻以後所取的值 x_2，根據這個固定時刻的取法，永遠都有：

$$|x_2-x_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

但另一方面，因爲 a 與 x_1 都屬於區間 Δ_n，而 Δ_n 的長又小於 $\frac{\varepsilon}{2}$，所以

$$|x_1-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

這兩個不等式就得到：

$$|x_2-a|<\varepsilon;$$

這裏 ε 是任意一個正數，又 x_2 是變量 x 的任意一個充分後面的（在固定時刻之後所取的）值。這就說明 $\lim x=a$。

至於條件的必要性，證明是很簡單的：假定 $\lim x=a$，於是對於變量 x 的任何兩個充分後面的值 x_1 與 x_2，我們都有：

$$|x_1-a|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |x_2-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由此就得到：

$$|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

這就是所要證明的。

以上證明的這個準則❶對於理論的建立是非常有用的，但較少應用來確定個別具體情形下的極限的存在。原因是在許多具體問題中都很難驗證這個準則的條件是否成立。

上面我們已經對任何類型的過程，在最一般的假設之下，證明了極限存在的準則。當然，像我們在 § 14 裏所做的一樣，把過程的數學結構具體化。我們就可以從這個一般準則得到相當於每一種類型的過程的完全具體的準則。我們舉出這一類的若干重要的特殊準則如下。

1. 實數序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的極限存在的必要充分條件是：無論正數 ε 怎樣小，總有這樣一個自然數 n_0，使得當 $n>n_0$, $m>n_0$ 時，永遠有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$。簡單地說，任何兩個"充分晚"的項彼此相差任意小。

2. 函數 $y=f(x)$ 當 $x\to a$ 時極限存在的必要充分條件是：無論正

❶ 這個判別法通常稱爲哥西準則；一般來說，我們把同時必要而又充分的判別法稱爲準則。

數 ε 怎樣小，總有另外一個正數 δ 存在，使得當 $|x_1-a|<\delta$, $|x_2-a|<$ $<\delta(x_1\neq a, x_2\neq a)$ 時，永遠有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。簡單地說，在任何兩個充分接近於 a 的點，函數 $f(x)$ 的值，彼此相差任意小。

3. 函數 $y=f(x)$ 當 x 無限增大時極限存在的必要充分條件是：無論正數 ε 怎樣小，總有這樣的正數 A 存在，使得當 $x_1>A$, $x_2>A$ 時，永遠有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。簡單地說，對於 x 的任何兩個充分大的值，函數 $f(x)$ 的值彼此相差任意小。

在結束我們的極限理論的講解時，我們認為有必要指出，為了熟練極限的實際計算，大量的練習是必要的。Б. П. 捷米多維奇的習題集有許多這一類的富有啓發性的習題，其中我們特別介紹習題 38, 40, 41, 42, 48, 50—58, 60, 68, 76, 109—112, 357—365, 376—380（第一章）。

第五章　函數的連續性

§ 20. 連續性的定義

當我們有了前面那些準備之後，現在已經可以轉到數學分析的基本問題，來研究各種不同類型的函數關係了。不過這裏我們應該系統地來接近我們的研究對象，一開始應該先選出那些不但在理論上起奠基的作用，同時在實際應用上也是最重要的函數族來進行研究。數學分析的歷史發展告訴我們：按照這個計劃，我們應當先從**連續**函數族講起。連續性的概念，也就是一個量連續地變化的概念，在直觀上對每一個人都很清楚，而且我們已經不只一次地使用過這個術語了，然而直到現在，我們並沒有賦予這個概念以任何確定的含義。現在我們有必要給它一個精確的定義，並且仔細地研究連續函數的性質——這不僅因為在實際上我們總是碰到這樣的函數，而且也因為對其他更廣泛的函數族的研究，在極大程度上都要歸結到連續函數的研究上來。

假定 $y=f(x)$ 是在數軸的某一個區間上確定的函數，又點 a 是這個區間的一個內點。在點 a 函數 $f(x)$ 有一個確定的值 $f(a)$。現在我們移轉目標來考慮點 a 鄰近的某一點 $a+h$，其中 h 是一個絕對值很小的正數或負數。我們通常把我們注意力從點 a 轉向點 $a+h$ 這件事情，說成是：先取值 a 的量 x，在得到一個**改變量** h 之後，取得新的值 $a+h$。上面我們已經說過，這裏改變量 h 可正可負。對應於量 x 的新值 $a+h$，函數 $f(x)$ 也有一個新的值 $f(a+h)$。我們很自然地把量 y 的新舊兩值之差 $f(a+h)-f(a)$ 也叫做 y 的**改變量**，說得更準確一些，應該是，當量 x 從舊值 a 過渡到新值 $a+h$ 時，y 所得到的改變量。當然，這個改變量可以為正，也可以為負（也有時等於零）。在分析裏，我們常用符號 Δu 來記任何量 u 所得到的改變量。所以我們可以這樣說：

如果我們一開始有 $x=a$，則對應於量 x 的改變量 $\Delta x=h$，量 y 的改變量 $\Delta y=f(a+h)-f(a)$。這個關係的幾何解釋如圖 10 所示。

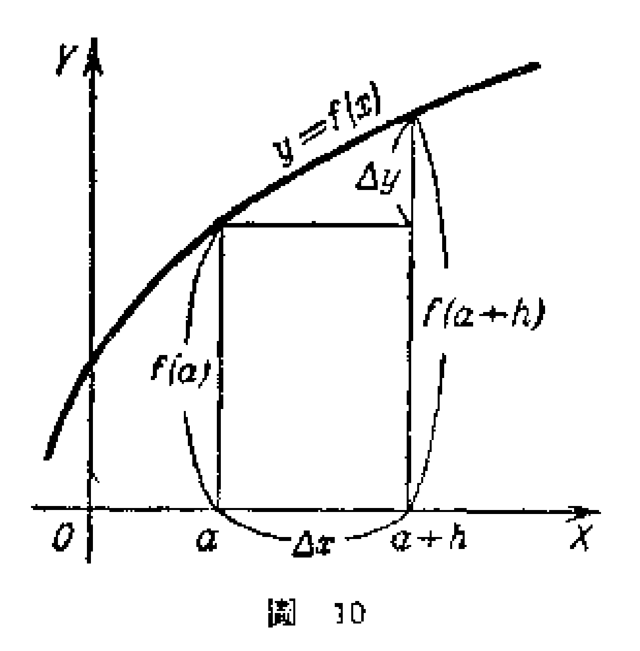


圖 10

假如我們保持 a 不變而讓量 x 的改變量 h 變動，則很明顯，量 y 的改變量 $\Delta y=f(a+h)-f(a)$ 也要變動；並且對應於每一個值 Δx，有一個確定的值 Δy。現在我們特別讓量 h 趨向於零，換句話說，讓量 x 的新值 $a+h$ 趨向於它的舊值 a；如果這時函數 $y=f(x)$ 的改變量 Δy 也趨向於零，那就表示，當量 x 的變化充分小時，量 y 的變化可以任意小。這個性質正好是連續性的直觀內容。因此，連續性概念的實質是：當自變量的改變量是無窮小量時，對應的函數改變量也是無窮小量。又因為關係式

$$\Delta y=f(a+h)-f(a)\to 0 \quad (\Delta x=h\to 0)$$

與關係式

$$f(a+h)\to f(a) \quad (h\to 0),$$

等價，所以，連續性的定義可以敘述如下：

函數 $f(x)$ 稱為在 $x=a$（或"在點 a"）連續，是指

$$f(a+h)\to f(a) \quad (h\to 0).$$

因此，要想函數 $f(x)$ 在點 a 連續，就必須要，而且也只要當 $x\to a$ 時，函數 $f(x)$ 的值趨向於一個確定的極限，並且這個極限就是這個函數在點 a 的值 $f(a)$。這裏非常重要的一點是：關係式 $f(a+h)\to f(a)$ 是要在不論 h 取怎樣的方式趨向於零時都要成立。所謂不論 h 取怎樣的方式，就是說它既可取正的值也可取負的值，也可以時正時負地變號。換句話說，就是不管 x 是從左邊，還是從右邊，或者甚至於是時左時右地趨向於點 a，我們都應當有 $f(x)\to f(a)$（參看 § 15，函數的雙邊

極限)。

在 § 14 中我們曾經把極限概念精確化，現在根據那裏的結果，連續性定義可以精確地敍述如下(在許多場合，這個定義是最方便的)：函數 $f(x)$ 稱爲在點 a 連續，是指對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$，都有這樣一個 $\delta>0$ 存在，使得對任何絕對值不大於 δ 的數 h，我們都有 $|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$。簡單地說，函數在一個已知點連續，是指對應於自變量的充分小的變化，函數的變化可以任意小。

函數的連續性有時可以在這一點或那一點遭受破壞。這種情形多半是(圖 11)：當 x 從右邊($h>0$)趨向於 a 時 $f(x)$ 趨向於一個確定的極限，當 x 從左邊($h<0$)趨向於 a 時也趨向於一個確定的極限，但是這兩個極限彼此並不相等。在這種情形，不再有唯一的極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$，像圖 11 中所指出的，函數 $f(x)$ 在點 a 就有了間斷的現象。以往我們已經知道，x 從右邊(即祇取大於 a 的值)趨向於 a 這件事實，可以用符號 $x\to a+0$ 來表示。如果在這個過程中 $f(x)$ 趨向於某一個極限，則這個極限就記作 $f(a+0)$，即

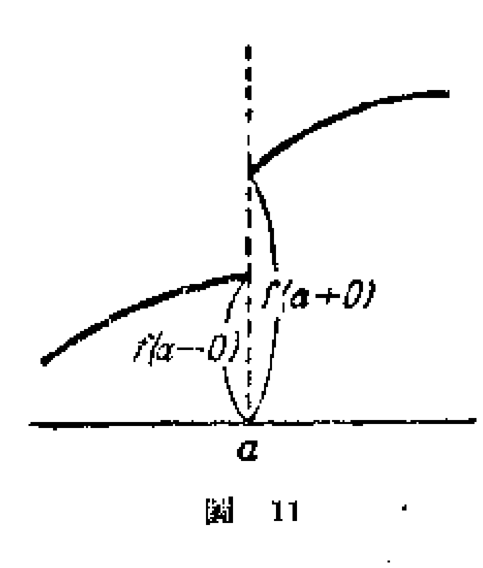


圖 11

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x).$$

符號 $x\to a-0$ 與

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)$$

具有類似的意義。在圖 11 中所考慮的情形，兩個極限 $f(a+0)$ 与 $f(a-0)$ 都存在，但是彼此不同。而要函數 $f(x)$ 在點 a 連續，則不僅要這兩個極限相同，而且還要它們中的每一個都等於函數 $f(x)$ 在點 a 的值 $f(a)$ (顯然，數 $f(a+0)$ 與 $f(a-0)$，根據它們的定義，不僅不一定等於 $f(a)$ 而且與之毫無關係)。因此，除去 $f(a+0)\neq f(a-0)$ 是

上面這個例中連續性遭受破壞的原因外，連續性的破壞還可以有其他的原因，那就是：

1) $f(a+0)$ 或 $f(a-0)$ 可以根本不存在。下面的兩個函數可以作爲這種情形的典型例子。

a)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0);\end{cases}$$

當 $x\to+0$ 時 $f(x)$ 無限增大，當 $x\to-0$ 時，$f(x)$ 是負的而其絕對值無限增大。所以 $f(+0)$ 與 $f(-0)$ 都不存在。函數 $f(x)$ 在點 0 的鄰域內無界。

б)
$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0);\end{cases}$$

當 $x\to+0$ 時，$f(x)$ 雖然保持有界 $\left(\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1\right)$，但是不可能趨向於任何極限，因爲它總是一再地時而等於 $+1$ 時而等於 -1（以及 $+1$ 與 -1 之間的任何數）。顯然，當 $x\to-0$ 時，$f(x)$ 有同樣的情況。所以，這裏 $f(+0)$ 與 $f(-0)$ 也都不存在，雖然 $f(x)$ 在點 0 的鄰域內是有界的。

2) 有時可能 $f(a+0)$ 與 $f(a-0)$ 都存在而且彼此相等，但是它們不等於 $f(a)$。例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq 0),\\ 1 & (x=0);\end{cases}$$

對於 $a=0$ 這兒有 $f(a+0)=f(a-0)=0$，但是同時 $f(a)=1$。在所有以上舉出的例中函數 $f(x)$ 在 $x=a$（在點 a）都是間斷的（不連續的）。

千萬要隨時留神，我們以上這樣規定的連續性只是函數的一種局部的（地方性的）性質。一般說來，函數只在一些點具有這個性質而在另一些點就沒有這個性質。如果函數在變量 x 取某些值時連續，這些值就叫做函數 $f(x)$ 的連續點；那些使函數不連續的 x 的值，則叫做它的

間斷點。到現在爲止，在我們所考慮的那些不連續函數的例子中，每一個函數都是除了一個唯一的點而外到處連續。這些函數的間斷點所成的集合都只由一個點組成。我們不難作出具有兩個、三個、等等間斷點的函數的例子，甚至於要作出一個函數，它的間斷點組成一個無限集合，也並不困難。事實上，有這樣的函數存在，它根本沒有連續點，從而它的間斷點塡滿了整個數軸。在 § 4 裏我們考慮過的函數 $D(x)$ 就是這類函數之一，它當 x 是無理數時等於 0，當 x 是有理數時等於 1。事實上，因爲數軸的任何一個區間，旣含有無窮多個有理數又含有無窮多個無理數，所以不管 a 是怎樣一個數，旣可以找到跟它任意接近的有理數，也可以找到跟它任意接近的無理數。這就表示函數 $D(x)$ 在那些任意接近於 a 的點，旣可以取到數値 0 又可以取到數値 1。由此可見，當 $x\to a$ 時 $D(x)$ 不可能趨向於任何極限，從而，當 $x=a$ 時是不連續的。但因數 a 是任意的，所以 $D(x)$ 到處都不連續。並且顯然對於一切 x 的値 $D(x+0)$ 與 $D(x-0)$ 都不存在。

有時候，有需要來分辨函數在一個已知點的單邊的連續性。函數 $f(x)$ 稱爲在點 a 右連續，是指 $f(a+0)$ 存在，並且 $f(a+0)=f(a)$；稱爲左連續，則是指 $f(a-0)$ 存在，並且 $f(a-0)=f(a)$。顯然，函數在點 a 要連續，必須而且僅須它在該點旣左連續又右連續。

如果函數 $f(x)$ 在一個區間 (a, b) 的每一點都連續（卽在該區間沒有一個間斷點），我們就說它在這個區間上連續。這裏在區間的左端 a 只要求右連續，而在右端 b 則只要求左連續。這樣的規定是很自然的，因爲函數 $f(x)$ 常常只是在區間 (a, b) 的點上確定，所以關於它在點 a 的左邊（或點 b 的右邊）的連續性問題是沒有意義的。我們這樣規定的函數在一個區間上連續的概念，一點也不影響我們的論斷：連續性在本質上是局部的概念。須知我們是用在一點的連續性概念來規定在一個區間的連續性概念的，所以這個概念在連續函數的理論中仍舊是初級的並且有着明顯的我們說過的那種局部性質。

§21. 連續函數的運算

類似於我們在第二章裏研究過對無窮小量，無窮大量與趨向於極限的量施行算術運算的結果的情形，我們現在要證明函數的連續性在初等算術運算下一般也維持不變。這個問題的重要性是顯然的，因爲這個問題的總的解決，可以使我們無須每一次再來特別研究那些從連續函數經過算術運算得到的函數的連續性。

假定我們有一個代數和

$$f(x)=f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x),$$

其中每一個函數 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都在 $x=a$ 連續。按照連續性的定義這就表示當 $x\to a$ 時，$f_1(x)\to f_1(a)$，$f_2(x)\to f_2(a)$，$\cdots$，$f_n(x)\to f_n(a)$。但是在這個情形下，根據 §11 的定理 1，我們可以斷定：當 $x\to a$ 時，

$$f(x)=f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)\to$$
$$\to f_1(a)\pm f_2(a)\pm\cdots\pm f_n(a)=f(a),$$

而這就表示函數 $f(x)$ 在點 a 連續。

同樣的簡單推理（根據 §11 的定理 2）顯然可以證明：任意有限多個在點 a 連續的函數之積仍然在該點連續。特別若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續，則函數 $\{f(x)\}^n$ 也有同樣的性質，這裏 n 是任意的自然數。除法運算照例要有一些限制。假定 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 是兩個在點 a 連續的函數，又假定 $f_2(a)\neq 0$。

因爲當 $x\to a$ 時，根據我們的假定 $f_1(x)\to f_1(a)$，$f_2(x)\to f_2(a)$，於是按 §11 的定理 7

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a}f_2(x)}=\frac{f_1(a)}{f_2(a)},$$

這也就是說，函數 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 在 $x=a$ 連續。因此，連續函數之商還是連續

函數這個法則在 $f_2(a)\neq 0$ 的條件下是成立的。至於如果 $f_2(a)=0$，則表達式 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 當 $x=a$ 時一般沒有意義，因此這時關於商的連續性問題就沒有任何內容。

如果我們談到的是在整個區間上的，而不是在個別點的，函數的連續性時，以上建立的法則仍然有效。這可以直接從在區間上的函數的連續性的定義推出來，這個定義在 § 20 已經講過了。關於商的情形，顯然應該敍述爲：如果函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 在某區間上連續，又 $f_2(x)$ 在這個區間上無一處爲零，則函數 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 在這個區間上也連續。

§ 22. 複合函數的連續性

假定量 y 是確定在區間 (a, b) 上的關於 x 的函數，$y=f(x)$。當 x 取遍區間 (a, b) 的一切數時，函數 $f(x)$ 所取的值組成一個集合，記作 $\mathscr{M}$。假定有第三個變量 z 是關於 y 的函數，$z=\varphi(y)$，它對於一切屬於集合 $\mathscr{M}$ 的量 y 的值都有定義。當 x 在區間 (a, b) 上任取一個確定的數值時，則 $y=f(x)$ 也就得到某一個屬於集合 $\mathscr{M}$ 的數值；但是這樣一來，量 $z=\varphi(y)$ 同樣也得到了一個確定的數值。因此，對於量 x 在區間 (a, b) 上的每一個值，總有量 z 的某一個值與之對應。換句話說，z 是在區間 (a, b) 上確定的關於 x 的一個函數。顯然，這個函數關係最方便莫如寫作

$$z=\varphi[f(x)],$$

或寫作兩個等式：

$$z=\varphi(y), \quad y=f(x).$$

量 z 不是直接地用自變量 x 來確定的，而是通過"中間"函數 y 來確定的。z 確定爲 y 的函數，而 y 又確定爲 x 的函數，其結果 z 就成爲 x 的函數。用這種方式給出的函數叫做**複合函數**（或者"函數的函數"）。

例．假定 $y=\cos x$，$z=\lg y$．因爲函數 $\lg y$ 祇對於正的值 y 有定義，所以我們限於使 $y=\cos x>0$ 的那些值 x。例如假定 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant+\frac{\pi}{4}$。

於是 $y>0$, 因而 $\lg y$ 有確定的意義。我們可以寫成

$$z=\lg\cos x\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right).$$

大家都知道，這個函數對於用對數來解三角問題時有很大的意義，並且因此爲它做出了詳細的三角對數表。下面的兩個函數提供了另外的簡單例子：

$$z=y^2,\qquad y=\sin x,\qquad z=\sin^2 x,$$

$$z=\frac{1}{1+y},\quad y=\sqrt{1+x^2},\quad z=\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

（這兩個函數都是對於 x 的任何値都有定義的）。

以上這些例子（也如複合函數定義本身一樣）說明了："複合函數"這個名詞，目的只在描述函數的某種新的**表达方法**，而不是任何在原則上來說都是新的一類函數關係。只要我們願意這樣做，很簡單的函數也可以表作複合函數的形式。例如函數 $z=x^4$ 就可以用關係式 $z=y^2, y=x^2$ 來確定，而這樣一來，就成爲複合函數了。

顯然，函數的表達方法還可以更複雜——包含不止一個而是兩個或更多個中間函數。例如：函數 $v=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$ 可以用一串關係式 $v=\lg u,\ u=1+z,\ z=\sqrt{y},\ y=1+x^2$ 來表達，而這就包含了三個中間函數：u, z, 與 y。

假定 $z=\varphi(y),\ y=f(x)$, 假定函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上確定而且連續，又函數 $\varphi(y)$ 也在某一個區間上確定而且連續，而該區間包含當 $a\leqslant x\leqslant b$ 時函數 $f(x)$ 的一切値。我們要證明，這時複合函數 $z=\varphi[f(x)]$ 在區間 (a,b) 上也連續。假定 α 是區間 (a,b) 上的任意一點，又 $f(\alpha)=\beta$。根據我們所假定的函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上的連續性，我們有

$$\lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)=\beta;$$

但另一方面，根據假設函數 $\varphi(y)$ 在 $y=\beta$ 連續。因而從 $f(x)\to\beta$ 就

得到

$$\varphi[f(x)]\to\varphi(\beta)=\varphi[f(\alpha)]\quad(x\to\alpha);$$

而這就證明了複合函數 $\varphi[f(x)]$ 在點 α 的連續性。又因為 α 是區間 (a, b) 的任意一點，所以函數 $\varphi[f(x)]$ 在這整個區間上連續。因此，我們已經證明了下述命題:

定理 1. 如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上連續，又函數 $\varphi(y)$ 也在某一個區間上連續，而該區間包含着函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上所取的一切值，則複合函數 $\varphi[f(x)]$ 也在區間 (a, b) 上連續。

換句話說，如果組成已知複合函數的兩個函數關係都連續，則該複合函數本身也連續。用簡單的歸納法不難把這個定理推廣到由三個或更多的環節組成的複合函數：如果每一環節的函數關係都連續，則它們組成的複合函數也連續。在應用上我們時常遇到複合函數，它們的每一環節是某一個初等函數（參看 § 6）。在每一個這樣的情形，特別來證明我們所碰到的初等函數的組合的連續性，往往是非常繁重的工作。定理 1 就一勞永逸地使我們解除了這樣做的必要：只要我們能證明不多幾個簡單初等函數的連續性（這將在 § 24 中辦到），從定理 1 與 § 21 的定理我們就可以得到這些簡單函數的任何有限組合（即任何這種由簡單初等函數經過算術運算與組成複合函數，在任何次序下與重複任意有限回的情形下所組成的組合）的連續性。

§ 23. 連續函數的重要性質

連續函數具有這樣一系列的性質，使得它們的研究與應用比起不連續函數的情形要簡單得多。現在我們來敍述並證明若干這一類的重要性質，不過我們首先要建立一個輔助性的定理，我們以後將不只一次地引用這個定理。

引理. 如果函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續而且大於零，則它一定在某一個包含點 a 在其內部的整個區間上大於零。

證明．根據已知函數在點 a 的連續性，我們有

$$f(x)\to f(a) \quad (x\to a);$$

因此從 $f(a)>0$ 根據 § 10 定理 2 就知道 $f(x)>0$，只要 x 充分地接近 a。而這樣引理的結論就已經成立。

當然，用同樣的方法可以證明，如果 $f(a)<0$，則對於某一個包含點 a 在其內部的區間的一切點我們都有 $f(x)<0$。

我們說一個確定在區間 (a,b) 上的函數 $f(x)$ 在該區間上是有界的，如果它在區間 (a,b) 上所取的值組成的集合有界。

定理 1. 在區間 (a,b) 上連續的函數 $f(x)$ 一定在該區間上有界。

證明．假定 α 是區間 (a,b) 的任意一點。因爲函數 $f(x)$ 在點 α 連續，所以 $|f(x)-f(\alpha)|<1$，只要 x 充分接近 α。從而，有以點 α 爲中心的區間 δ_α 存在，使得區間 δ_α 的任何點 x ❶ 都滿足 $|f(x)-f(\alpha)|<1$，於是

$$|f(x)|<|f(\alpha)|+1.$$

這樣的區間 δ_α，我們可以對區間 (a,b) 的每一個點 α 來作。所有這種區間的全體組成的區間組 S 顯然蓋住了區間 (a,b)。根據有限覆蓋定理（§ 18 引理 2），從組 S 可以挑出一組有限個區間 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$ 同樣也蓋住了區間 (a,b)。每一個這樣的區間 Δ_k 都是我們所作的區間中的某一個 δ_{α_k} $(k=1,2,\cdots,n)$。因此對於區間 Δ_k 的任何點 x，我們有

$$|f(x)|<|f(\alpha_k)|+1.$$

如果我們把 $|f(\alpha_1)|,|f(\alpha_2)|,\cdots,|f(\alpha_n)|$ 這 n 個數中的最大者記作 μ，並且記住區間 (a,b) 的任何點 x 至少要屬於區間 Δ_k 中的某一個，於是對於區間 (a,b) 的任何點 x 我們就有

$$|f(x)|<\mu+1;$$

這就證明了函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上的有界性。

---

❶ 當然假定 x 屬於區間 (a,b)；如果點 α 是區間 (a,b) 的一端時，則不等式 $|f(x)-f(\alpha)|<1$ 當然只要求對於區間 δ_α 而且同時又屬於區間 (a,b) 的點 x 成立。

定理 2. 在區間 (a,b) 上連續的函數一定在該區間上取到一個最大值與一個最小值。

註解. 根據前一個定理，函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上有界。又根據§18引理3，函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上所取的值組成的集合 $\mathscr{M}$ 從而有下確界 α 與上確界 β。然而我們知道一個有界集合的確界不一定就屬於這個集合本身。在我們現在的情形，就是說 α 與 β 可能不屬於集合 $\mathscr{M}$，換句話說，可以不是函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上的值。對於不連續的函數來說，這樣的情形是完全可能的。例如假定

$$f(x)=\begin{cases} x & (x<1), \\ 0 & (x=1), \end{cases}$$

只要 $x<1$ 而且充分接近於1，$f(x)=x$ 就可以任意與1接近。故上確界 $\beta=1$。然而在區間 $(0,1)$ 上沒有一個點可以使 $f(x)=1$，而到處都是 $f(x)<1$。定理2的目的就是要說明對於連續函數來說這種情形是不可能的，因而集合 μ 的上下確界就分別是函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上的最大值與最小值。換句話說，在 (a,b) 上永遠可以找到這樣的點 x_1 使 $f(x_1)=\alpha$，也有這樣的點 x_2 使 $f(x_2)=\beta$。

證明. 我們只對上確界 β 來進行討論，因為對於下確界的討論完全可以類似地進行。我們假定在區間 (a,b) 的任一點 x 都有 $f(x)<\beta$，然後設法得出矛盾來。因為函數 $\beta-f(x)$ 在區間 (a,b) 上連續而且不等於零，所以根據§21最後的結果函數 $\frac{1}{\beta-f(x)}$ 也連續，於是由定理1可知它在這個區間上有界。從而有這樣的數 $C>0$ 存在，使得

$$\frac{1}{\beta-f(x)}<C \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

即

$$f(x)<\beta-\frac{1}{C} \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

因為數 C 是一個正常數，所以這就與上確界的定義相抵觸。因為依照上確界的定義，無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，在區間 (a,b) 上總可以找到 $f(x)$ 的值超過 $\beta-\varepsilon$。這個矛盾就證明了定理2。

定理 3. 如果函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上連續，又 γ 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的任意一個數，則在 a 與 b 之間一定可以找到這樣一個點 c 使 $f(c)=\gamma$。

註解. 定理 3 表達了連續函數的這樣一個性質，它就是我們直覺中的連續變化的眞實意義：連續變量從一個值變到另一個值的過程中，一定要經過一切中間值而不能脫掉其中的任何一個。

證明. 我們首先考慮一個特殊情形，其中 $f(a)$ 與 $f(b)$ 有相反的符號，又 $\gamma=0$（換句話說，我們要證明一個連續函數從正值變到負值或從負值變到正值的過程中，一定要經過零）。我們假定 $f(x)$ 在 (a,b) 區間的每一個點都不等於零，然後再來設法找出矛盾。我們把一個區間叫做是**正則**的，如果在它的兩端函數 $f(x)$ 有相反的符號。顯然，一個正則區間的兩半中一定有一半而且也只有一半是正則的（我們要提醒一下，這是根據了我們的假定 $f(x)$ 無處爲零）。根據定理的假設 $\Delta_1=(a,b)$ 是正則的。設 Δ_2 是 Δ_1 的正則的那一半，Δ_3 又是 Δ_2 的正則的一半，依此類推。區間 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n \cdots$ 組成一個區間套，因而，它們有一個公共點，我們把這個公共點記作 c。因爲根據我們的假定 $f(c)\neq 0$，所以 $f(c)>0$ 或 $f(c)<0$。爲確定起見，假定 $f(c)>0$。根據本節開始時所講的引理，對於一切充分接近 c 的 x，我們都應該有 $f(x)>0$。但是點 c 屬於正則區間 Δ_n，而 Δ_n 的長可以任意小，這就表示在點 c 的任何鄰域內總有使 $f(x)<0$ 的點（區間 Δ_n 的一端）。這樣就發生矛盾。這就證明了定理 3 的特殊情形。

現在我們來討論一般情形，令 $f(x)-\gamma=\varphi(x)$。因爲根據定理的條件 γ 是在 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間，所以 $\varphi(a)$ 與 $\varphi(b)$ 有相反的符號。但因函數 $\varphi(x)$ 隨 $f(x)$ 連續而連續，所以根據剛才證明的特殊情形，在 a 與 b 間可以找到這樣的點 c 使 $\varphi(c)=0$，也就是說，使 $f(c)=\gamma$。這樣一來，定理 3 就完全證明了。

現在假定函數 $y=f(x)$ 在區間 (a,b) 上連續而且遞增，即當

$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 時，我們永遠有 $f(x_1) < f(x_2)$。設 $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 又 γ 是 α 與 β 之間的任意一個數。根據定理 3，有這樣的數 c $(a<c<b)$ 存在，使得 $f(c)=\gamma$。但因函數 $f(x)$ 是遞增的，所以這個數 c 顯然是唯一的。因此，對於區間(α, β)的每一個數 γ，都有區間 (a, b) 的一個數 c 與之對應。換言之，對於量 y 在區間 (α, β) 上的每一個值，都有量 x 在區間 (a, b) 上的一個唯一確定的值與之對應，並使得 $y=$ $=f(x)$成立。所以，量 x 是確定在區間 (α, β) 上的關於 y 的一個函數：

$$x=\varphi(y) \quad (\alpha \leqslant y \leqslant \beta);$$

這時，顯然有 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$。函數 $x=\varphi(y)$ 稱為函數 $y=f(x)$的**反函數**，這兩個函數在實質上代表量 x 與 y 之間的同一個關係，它們彼此不同的地方，是在於從這兩個量中究竟把哪一個取作自變量，哪一個取作函數。

例 1. $y=x^3$ $(-\infty<x<+\infty)$；反函數：$x=\sqrt[3]{y}$ $(-\infty<y<$ $<+\infty)$。

例 2. $y=\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$；反函數：$x=\arcsin y$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$。

現在我們要證明：遞增連續函數的反函數在對應區間上也是連續的。

定理 4. **假定函數** $y=f(x)$ **在區間** (a, b) **上遞增而且連續，又** $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$；**則反函數** $x=\varphi(y)$ **在區間** (α, β) **上也連續。**

證明. 先假定 γ 是區間(α, β)的任意一個內點。令 $\varphi(\gamma)=c$，於是 $a<c<b$，並且 $f(c)=\gamma$。取 $\varepsilon>0$ 足夠小，使得數 $c-\varepsilon$ 與 $c+\varepsilon$ 都屬於區間 (a, b)。令

$$f(c-\varepsilon)=\gamma_1, \quad f(c+\varepsilon)=\gamma_2,$$

於是 $\gamma_1<\gamma<\gamma_2$。我們用 δ 來記 $\gamma-\gamma_1$ 及 $\gamma_2-\gamma$ 兩數中小的一個。

現在假定 $|y-\gamma|<\delta$，於是，顯然有 $\gamma_1<y<\gamma_2$。因而

$$\varphi(\gamma_1)<\varphi(y)<\varphi(\gamma_2);$$

但 $\varphi(\gamma_1)=c-\varepsilon$, $\varphi(\gamma_2)=c+\varepsilon$, 所以,

$$c-\varepsilon<\varphi(y)<c+\varepsilon,$$

這就是說，$|\varphi(y)-c|=|\varphi(y)-\varphi(Y)|<\varepsilon$。因此，我們已經證明了從 $|y-Y|<\delta$ 可以推得 $|\varphi(y)-\varphi(Y)|<\varepsilon$ 因爲 $\varepsilon>0$ 可以任意小，故函數 $\varphi(y)$ 在點 Y 連續，這就是所要證明的。

當 $Y=\alpha$ 或 $Y=\beta$ 時，用同樣的考慮方法可以得出函數 $\varphi(y)$（在點 α）的右連續性與（在點 β）左連續性。

當然，這個定理對於遞減的連續函數也是成立的。

在 §20 裏我們已經屢次着重指出過連續性定義的局部性；這種性質，是按照每一個個別的點來確定的，因此，一般說來，函數可以在某些點連續而在另外一些點不連續。至於函數在區間上的連續性，則我們是用它在這個區間的每一點的連續性來確定的。其實，我們也可以直接定義函數在區間上的連續性，而不必依賴於在一點的連續性概念。這樣做時，我們的基本出發點還是以下這個基本概念，即連續性的實質就是當自變量的變化很小時函數的變化也很小。

我們稱函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上一致連續，假如它在這個區間的任意兩個彼此充分靠近的點上的值之差，就絕對値來說，可以任意小。精確地說：我們稱函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上一致連續，是指下面的條件成立：無論 $\varepsilon>0$ 怎樣小，都有這樣一個 $\delta>0$ 存在，使得當區間 (a, b) 的任意兩點 x_1, x_2 的距離 $|x_1-x_2|$ 小於 δ 時，我們都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。我們稱這樣確定的連續性是一致的，是由於在這裏，差 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的任意小並不依賴於點 x_1 與 x_2 在區間 (a, b) 上的位置，而只要它們彼此充分接近就成了。

一致連續性的概念對數學分析來說有非常重大的意義。因此有必要在一開始就弄清楚，這個概念與我們從前確定的函數在區間上的連續性的概念有些什麼關係。首先，這幾乎是顯然的，從函數在區間上一致連續性可以推出它在這個區間的每一點的連續性，換句話說，可以推出我們以前規定的在區間上的連續性。事實上，如果函數 $f(x)$ 在某區間

上一致連續，又α是這個區間的任何一點，則當x充分逼近α時$|f(x)-f(\alpha)|$可以任意小，而這就表示函數$f(x)$在點α連續。然而，比這個更加深刻得多的事實，是它的逆定理也是對的，換句話說，從函數在某一個(閉)區間的每一點的連續性就足以推出它在這個區間上的一致連續性。這樣一來，我們連續性的(對於閉區間的)新定義就恰好與以前的(局部性的)定義完全一致。

定理 5. 在(閉)區間(a, b)的每一點都連續的函數一定在該區間上一致連續。

證明 假定α是區間(a, b)的任意一點又ε是任意一個正數。因為函數$f(x)$在點α連續，所以對於一個充分小的$\delta_\alpha>0$，我們會有

$$|f(x)-f(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

只要x[1] 是在區間$(\alpha-\delta_\alpha, \alpha+\delta_\alpha)$上。因此，如果$x_1$與$x_2$是$(\alpha-\delta_\alpha, \alpha+\delta_\alpha)$的任意兩點，則

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon. \tag{1}$$

我們對區間(a, b)的每一點α都進行這樣的作法，並且把這樣作成的區間$(\alpha-\delta_\alpha, \alpha+\delta_\alpha)$縮短一半所得到的區間$\left(\alpha-\frac{1}{2}\delta_\alpha, \alpha+\frac{1}{2}\delta_\alpha\right)$稱為點$\alpha$的"專有區間"。這些專有區間的總體$S$顯然蓋住了整個區間$(a, b)$。根據有限覆蓋定理(§ 18 引理 2)，從這些專有區間中可以選出一組有限個區間$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$來，已經蓋住了區間$(a, b)$。把區間$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$中最小的區間長的一半記作$\delta$。

現在假定x_1與x_2是區間(a, b)上彼此距離小於δ的任意兩點，點x_1，正如區間(a, b)的任何一點一樣，應該屬於某一個區間Δ_k；而Δ_k是S的區間之一，因而是區間(a, b)的某一點α的專有區間$\left(\alpha-\frac{1}{2}\delta_\alpha, \alpha+\frac{1}{2}\delta_\alpha\right)$。故$|x_1-\alpha|\leqslant\frac{1}{2}\delta_\alpha$。但是另一方面，

$$|x_2-x_1|<\delta\leqslant\frac{1}{2}\delta_\alpha,$$

[1] 當然，我們這裏談到的x都是屬於區間(a, b)的，因為在這個區間以外的點，函數$f(x)$根本可以沒有定義。

其中後面的那個不等式，是從數 δ 的定義得來的。所以，α 與 x_2 兩數中的每一個離開 x_1 的距離都不大於 $\frac{1}{2}\delta_\alpha$，這就說明

$$|x_2-\alpha|<\delta_\alpha.$$

由此可見，點 x_1 與 x_2 都屬於區間$(\alpha-\delta_\alpha, \alpha+\delta_\alpha)$，故不等式(1)成立。但由於 x_1 與 x_2 是任意兩個距離小於 δ 的點，這就證明了函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上的一致連續性。

附註　我們永遠假定在定理 5 中所談到的區間是閉的，即包含兩端的區間。一般說來，定理 5 對開（不包含兩端）的區間並不成立。例如函數 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在開區間 $(0, 1)$ 的每一個點都連續，但在該區間並不一致連續。事實上，對於小的 $\delta>0$，令 $x_1=\delta, x_2=2\delta$，則 $|x_1-x_2|=\delta$ 而 $|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2\delta}=\frac{1}{2\delta}$。這時 $|x_1-x_2|$ 可以任意小，但 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 可以任意大。函數 $f(x)=\operatorname{tg} x$ 在開區間$\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$也有類似的情形。以上兩個例子中，我們討論的都是無界的函數；在 § 20 中我們所考慮的函數 $\sin\frac{1}{x}$ 在開區間 $(0, 1)$ 的每一個點都連續，並且顯然在這個區間內有界。然而它也沒有一致連續性，因為有任意小（因而也就彼此任意接近）的數 x_1 與 x_2 存在使 $\sin\frac{1}{x_1}=1, \sin\frac{1}{x_2}=-1$。

§ 24. 初等函數的連續性

在這一節裏，我們要證明一切簡單的初等函數基本上（即除了某些個別的而且易於鑑別的點而外）是連續的。

1. 根據 § 11 的定理 5，可以斷定每一個多項式 $P(x)$ 對 x 的任何值都連續。同節定理 7 的結果，正好斷定每個有理分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 對一切使分母不等於零的值 x 都連續。所以，**一切有理函數基本上是連續的**。

2. 我們來考慮指數函數 $y=a^x$，其中為了確定起見不妨假定 $a>1$。因為

$$a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1),$$

所以要證明函數 a^x 對任何 x 的連續性，只需要證明

$$a^h-1\to 0\ (h\to 0).$$

爲此我們首先注意：牛頓二項式

$$(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 而 n 是任一個自然數，當 $n>1$ 時給出[1]下面的不等式：

$$(1+\lambda)^n>1+n\lambda,$$

即

$$\lambda<\frac{(1+\lambda)^n-1}{n}.$$

爲了確定起見，不妨假定 $h>0$，然後在這個不等式中令 $\lambda=a^h-1$，於是我們得到

$$a^h-1<\frac{a^{nh}-1}{n}\ (h>0,\ n>1). \tag{1}$$

現在我們選取 n 使

$$n\leqslant\frac{1}{h}<n+1;$$

於是 $nh\leqslant 1$；因而 $a^{nh}\leqslant a$，因爲 $a>1$，函數 a^x 是遞增的，(可參看§17)。於是從 (1) 得到：

$$a^h-1<\frac{a-1}{n};$$

但因爲當 $h\to 0$ 時顯然有 $n\to\infty$，所以

$$a^h-1\to 0\ (h\to 0),$$

這就是所要證明的。因此，**一切指數函數 a^x 對任何 x 的值都是連續的**。

3. 在§17裏我們已經知道，對於一切 $a>0$，函數 a^x 都是單調的[2]：當 $a>1$ 時遞增，而當 $a<1$ 時遞減。因爲上面我們已經證明了這個函數的連續性，所以它的反函數唯一存在，並且根據§23定理4，這個反函數還在半直線 $x>0$ 上連續。這個反函數就是 $\lg_a x$。所以**一切對數函數都連續**。

---

[1] 在§7例3中我們已經看到過這個不等式。

[2] 一個函數叫做單調的，是指它在已知區間(也可能是在整個函數軸)上或者不減或者不增。

4. 其次，從指數函數的單調性還不難得出一般冪函數 x^a 在半直線 $x>0$ 上的連續性，這裏 a 是任何一個常數。事實上，爲確定起見不妨假定 $a>0$，又假定 n 是任意一個大於 a 的整數。我們有

$$(x+h)^a-x^a=x^a\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^a-1\right]. \qquad (2)$$

爲確定起見不妨再假定 $h>0$。由於指數函數的單調性，可知

$$1<\left(1+\frac{h}{x}\right)^a<\left(1+\frac{h}{x}\right)^n.$$

（當然，我們假定 $x>0$）。因爲 $\left(1+\frac{h}{x}\right)^n$ 是關於 h 的多項式，並且顯然當 $h\to0$ 時它趨向於 1，所以根據 § 11 的定理 10，從上面的不等式就可以斷定：當 $h\to0$ 時，

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^a\to1,$$

從 (2) 式就得到

$$(x+h)^a-x^a\to0 \quad (h\to0),$$

這就是所要證明的。因此，**每一個冪函數 x^a 對 $x>0$ 都連續**❶。

5. 函數 $\sin x$ 與 $\cos x$ 在整個數軸上的連續性是很容易證明的。事實上，

$$\sin(x+h)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

其中最後一個因子當 $h\to0$ 時趨向於零，從而整個右端也是這樣。對於函數 $\cos x$，可類似地進行證明。最後，函數 $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ 與 $\operatorname{cosec} x$ 可以表成以量 1, $\cos x$ 與 $\sin x$ 爲項的比式。所以**一切三角函數在它們有定義的一切點都連續**。

6. 應用關於反函數的連續性的定理（§ 23 定理 4）直接可以導出如下的結論：**一切反三角函數在相應的區間上連續**。例如我們考慮函

❶ 其實，如果把函數 x^a 寫成 $e^{a\lg_e x}$ 的形式，則利用 § 22 定理 1，我們也不難直接從指數函數與對數函數的連續性推出這個函數的連續性。

數 $\arcsin x$；因爲函數 $\sin x$ 在區間 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ 上單調，連續並且從 -1 遞增到 $+1$，所以它的反函數在區間 $(-1, +1)$ 上單調，連續並且從 $-\frac{\pi}{2}$ 遞增到 $+\frac{\pi}{2}$；而這個函數就是 $\arcsin x$。

這樣就完成了一切簡單的初等函數的連續性的證明。我們知道(§6)一切其他的初等函數都可以從這些簡單的初等函數經過有限個算術運算與構成複合函數來得到。又因爲把這些運算用到連續函數上時，根據 §§ 21—22 的定理，依舊得到連續函數，所以，這就證明了一切初等函數除了某些個別的點外，到處都連續，而這些個別的點，在每一個個別情形，都可以直接從相應函數的分析表達式看出來。

例. 函數

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{x-1}$$

除掉 1) 點 $x=1$, 2) 滿足等式

$$\frac{x}{x-1} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

的點 x，其中 k 是任意的整數，換句話說，點

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{(2k+1)\pi-2} \quad (k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$$

外，到處都連續。所以連續性的破壞只在那些直接可以看出來的點發生，在這些點已知函數的分析表達式失去了意義。

第五章的練習讀者可在 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第一章，§7 中找到。我們首先推薦習題 490—501, 515—518, 544, 546, 566, 568。進一步的挑選可以遵照教師的指導來進行。

第二篇　微分學初步

第六章　導數

§ 25. 函數的均勻變化與非均勻變化

當我們在實際上需要研究那些在變化着的量時，速度問題，也就是變化的快慢問題，通常是提出的主要問題之一。飛機或火車運動的速度是它們的工作效能的重要標誌。城市人口增長的快慢是城市生活的一個重要指標。一條由比較低的地方上升到比較高的地方的道路，它的險峻的程度直接與這條路在當地升高的快慢密切相關。

所謂變化的速度這個概念，它的原始含義，本來對於每個人都是很清楚的。不過，這種常識上的了解，要想用來解決大量的實際問題，却是很不够的。我們還有必要給它以精確的數量的定義。要建立這樣的定義，只在不多幾種最簡單的情形，初等數學的方法可以解決問題。而對於一般情形，則只有用我們現在正要着手研究的數學概念與方法才能得到圓滿的結果。在歷史上，關於量的變化速度的一般精確定義的需要，以及計算這個速度的一種劃一的方法的要求，正是我們稱爲數學分析的這門科學分支建立起來的基本動力之一，數學分析中有很大一篇的內容就是這個基本問題的解答以及由此得出的一些推論。通常我們把這一篇稱爲微分學，以下我們就進入這個範圍來進行討論。

假定量 y 是量 x（自變量）的一個函數：

$$y=f(x).$$

量 x 的一個變化（改變量）Δx 就引起量 y 的一個完全確定的變化（改變量）

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x). \qquad (1)$$

這個改變量 Δy 可以取得各種不同的值，它與自變量 x 原來的值是多少以及表達我們所研究的函數關係的函數 $f(x)$ 是一個什麼樣的函數都有關係；換句話說，正如直接從它的表達式(1)可以看出來的，Δy 除了依賴於改變量 Δx 外，還依賴於量 x 與函數 $f(x)$。很自然地，如果(對於給定的 Δx)，$|\Delta y|$ 很大，我們就認爲量 y 變化得快，如果它很小，我們就認爲變化得慢；特別，如果 $\Delta y=0$，則在自變量由值 x 變到值 $x+\Delta x$ 的過程中，y 根本沒有變化。

現在我們先來考慮一個簡單的情形，量 y 的改變量永遠與量 x 的改變量成正比的情形，卽 $\Delta y=\alpha\,\Delta x$ 的情形，其中 α 是一個既不依賴於 x 又不依賴於 Δx 的常數，特別，當 $\Delta x=1$ 時永遠有 $\Delta y=\alpha$，換句話說，不管自變量 x 原來的值是多少，它的一個單位變化永遠引起量 y 的同一個變化 $\Delta y=\alpha$。如果把 x 設想作時間，那麼在這種情形下，量 y 就在任何單位時間內(例如在任何一秒鐘內)改變了同樣多的量 α，而不管這一秒鐘是從那一個時刻 x 開始算起的。換句話說，在整個過程中，量 y 在單位時間內總是發生同樣的變化 α。直覺告訴我們，這時在整個過程中，量 y 的變化既不加快又不減慢，而是始終保持着同樣的速度的。因此，我們可以說，量 y 的這種變化是均勻的。自然，量的這種變化狀態必需承認是一種很特別的情形；不過儘管是特別情形但却是很重要的情形；它對我們今後的工作具有指導的意義，因此我們應該詳盡地來討論它的各種性質。

假定量 $y=f(x)$ 的變化是均勻的，又當 $x=a$ 時，$y=f(a)=b$；於是對於任何 x

$$f(x)-f(a)=\alpha(x-a),$$

因此，

$$f(x)=\alpha x+f(a)-\alpha a=\alpha x+\beta,$$

其中 $\beta=f(a)-\alpha a$ 是一個常數。因此，每一個均勻地變化的量 $y=f(x)$ 都是 x 的一個線性函數(一次二項式)：

$$y=\alpha x+\beta. \tag{2}$$

反過來說，如果量 $y=f(x)$ 與自變量 x 的關係就是(2)式，則

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=[\alpha(x+\Delta x)+\beta]-[\alpha x+\beta]=\alpha\,\Delta x,$$

也就是說，Δy 與 Δx 成正比，因而量 y 是均勻變化的。因此，線性函數，而且也只有它們，是均勻地變化的；這清楚地說明了，均勻變化的函數是多麼狹窄的一類特別的函數。

如果用 x 表示時間，從某一個時刻算起，又 y 表示在時刻 x 運動着的物體與起點之間的距離，則顯然，這個距離對應於 $\Delta x=1$ 的改變量 Δy 就是物體從時刻 x 起在單位時間（例如一秒鐘）內運動所經過的距離。如果 y 是均勻變化的，那麼物體在任何一秒鐘內都經過同樣的距離；如果這個距離是 α，我們就知道 $y=\alpha x+\beta$，其中 β 是一個常數。這種運動在物理學中稱爲**等速**運動，而在單位時間內一個等速運動的物體所經過的距離稱爲這個等速運動的**速度**。

同樣，在一般情形下，如果 x 與 y 是任何種類的兩個量，則所謂函數 $y=f(x)$ 均勻變化的意義，就是說當 x 改變了一個單位時，y 永遠改變同一個值 α；很自然地，我們就把 α 這個數值看作是量 y（**關於**量 x **的**）變化的**速度**。因此，均勻變化函數的速度的定義並不引起任何困難；而且如果這種函數寫成 $y=\alpha x+\beta$ 的形式時，常數 α 就是它的變化速度。在這裏，數 α 可以是正的，負的或者是零。如果 $\alpha<0$，則當 $\Delta x>0$ 時，$\Delta y<0$，就是說量 x 增大時，量 y 減小。當然，這個情況完全是客觀存在的。例如，在我們討論過的等速運動的情形裏，如果我們不把 y 看成運動着的物體距起點的距離，而算作是物體到運動終點的距離。則顯然，y 隨着時間的延長而減小，也就是當 $\Delta x>0$ 時，$\Delta y<0$。在 $\alpha=0$ 的情形，我們有 $y=\beta$：在過程進行中 y 保持不變；在我們上述例子中就相當於物體是靜止的，它的運動速度等於零。

很清楚，在函數的非均勻變化的情形，由自變量改變了一個單位所引起的函數的改變量，在變化過程中的不同時刻，是可以不同的，因而我們就沒有像上面這樣簡單的函數變化速度的定義了。不過首先，我

們可以預見到，關於函數變化速度的任何合理的定義，都應該使得在變化過程的不同時刻，表達出不同的速度，換句話說，變化速度這個概念應該是一個我們在前章中講過的所謂局部性的概念。

§ 26. 非均勻運動的瞬時速度

假定我們對這樣一個問題發生了興趣，要想知道一個汽車在某一個給定的時刻以什麼樣的速度在運動。對於這樣一個問題，回答常常是這樣的："每小時 40 公里"等等。這說明了什麼呢？用這句話也許是希望說明汽車在一小時內走了 40 公里？但是它回答了我們提出的問題嗎？應該明白，我們想要知道的是在給定的時刻汽車的速度是多少，而在一小時中，汽車的速度可能已經改變了許多次，它可以時而變快，又時而變慢；即使我們知道在整個一小時中它的確走了 40 公里，我們也還是不知道在給定的時刻，它到底有多快。

也許有人認爲，關於瞬時速度的問題是不重要的，重要的只是在一小時內汽車走了多長的距離。但是這是不正確的。汽車通過橋樑時，路標指示着說，速度不許超過每小時 10 公里。如果汽車以每小時 20 公里的速度前進，民警就要因爲超過所許可的速度而阻止並且懲罰司機。這不是很清楚嗎？又有誰知道汽車在前一小時內走了多少距離，又它此後一小時內會走多少公里呢？顯然，在這種情形下，知道汽車在這個或那個更長的時間內走了多少距離是完全不重要的，重要的只是現在，在給定的時刻，它到底是多快。

如果汽車的運動是均勻的，如果它總是以同樣的速度前進，那麼，"每小時 40 公里"這句話就完全刻劃了它的速度——在每個時刻都是一樣的速度。然而汽車的運動是不均勻的；在一小時內它的速度要改變許多次，當我們說到汽車在一小時內走了 40 公里，這只是告訴了我們汽車在這一小時內的平均速度，並沒有說明它在這個或那個確定時刻的速度，在它的路程上這個或那個確定的地點的速度。一小時是很

長的一段時間，在一小時之內汽車的速度是可以有許多次改變的。

很自然地，以上這種考慮使我們想到選擇一個較小的時間單位例如說一秒鐘，來代替一小時。比如說，已經知道在一秒鐘內汽車走了 20 米，那麽是否這還不能說明汽車在這一秒鐘開始時的速度呢？不管怎麽樣，在這裏情形是要好得多了：一般說來，在一秒鐘內汽車的速度是不會有什麽了不起的改變了，在一秒鐘內的不同時刻大致是以同樣的速度在運動；因而一秒鐘內的平均速度通常就已經是這一秒鐘內任何時刻的"瞬時"速度的一個很好的近似值。

這裏考慮的是比較粗糙的對象——汽車。但是在物理學和技術科學中常常還需要考慮更精確更細緻得多的情形，有些運動的物體，在一秒鐘內，其速度的改變比汽車在一小時內的改變還要更頻繁更劇烈得多。只要想一想那些物質的微粒——原子或電子——它們在一秒鐘內就要發生千萬萬次的撞擊，急速地改變着它們的速度。顯然，對於這樣的微粒來說，一秒鐘在它們的生活中是一個巨大的歷史時代，因而它們在一秒鐘內經過的距離一點也不能說明它們在這個或那個確定的時刻的運動速度。

因此，我們現在有必要來進入一般性問題的研究，關於這一點，我們上面考慮過的那些例子給我們作了充分的準備。我們用 t 來表示時間，從某一個選定了的時刻算起，用 s 表示物體從起算的時刻起到時刻 t ❶ 爲止所經過的路程。於是對於 t 的每一個值都對應一個確定的 s 的值，所以 s 是 t 的一個函數：

$$s=f(t).$$

這個函數關係稱爲已知物體的**運動規律**；我們以下算作這個運動規律是我們已經知道了的。

❶ 爲簡便起見，不妨假定物體是沿直綫運動的；事實上，以下所說的一切，就是在更廣泛的條件下也還是對的。

於是我們要想解決的問題就是：知道了運動的規律，應該怎麼樣來找物體在任何時刻 t 的運動速度？在解決這個問題之前，我們有必要先來作一個重要的關於方法論的說明，爲了要正確地理解我們這裏的處境，以及爲了今後我們要面臨的大量的實際問題，這個說明都是完全必要的。

在我們通常遇到的大量問題中，當我們要計算這個量或那個量（例如二次方程的根，直角三角形的腰的長度等等）時，這些量究竟是什麼是我們已經知道的，換句話說，我們已經知道這些量的一般性的定義；因此按照問題的性質，我們要找的只是這些量的數值或文字表達式。

但是我們現在所處的地位就完全是另外一回事情：所謂運動着的物體在一個給定的時刻的速度究竟是什麼東西我們是不知道的，我們還從來沒有給這個概念下過定義。驟然看來，我們的問題是沒有辦法解決的：難道說在我們還不知道一個量究竟表示什麼，換句話說，還不知道它的定義以前，就能够找到計算這個量的方法嗎？因此要想使得我們的問題是合理的而且能够得到解決，我們就應該認爲它給我們提出了一個雙重的任務：1）要建立瞬時速度的一般性的定義，2）要提供計算這個速度的一個具體辦法。我們以下就這樣做了，而且我們馬上就會看到，對於這兩個問題，我們可以同時從一個論點出發來予以解決，因而也就同時給出了兩個問題的答案。

今後我們還會看到，我們利用數學分析來解決的大量的幾何與力學的問題，都具有這種特殊的邏輯的性質。

現在我們就來着手解決我們的問題。在考慮我們希望確定瞬時速度的那個時刻 t 的同時，我們還考慮另一個較後的時刻 $t+\Delta t$。在這兩個時刻之間的那一段時間 Δt 內，顯然物體經過的距離 $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$ 就等於函數 $f(t)$ 對應於自變量的改變量 Δt 的改變量。因此我們可以說，在時刻 t 到 $t+\Delta t$ 之間的 Δt 這一段時間內，物體在單位時

間(例如一秒鐘)平均走過的路程是

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{1}$$

這個比值我們稱爲在時刻 t 與 $t+\Delta t$ 之間物體的平均速度。這個平均速度是否就是物體在時刻 t 的瞬時速度呢？如果 Δt 很大，在從 t 到 $t+\Delta t$ 這段時間內物體的速度也許會改變許多次而且還可能改變得很劇烈，因此我們不能把這個平均速度當作物體在時刻 t 的瞬時速度。但是如果 Δt 很小，我們就可以指望在這個時間內物體的速度來不及有很大的改變，物體在這個時間內的每一時刻都以大致相同的速度運動，因而在這個時間內的平均速度，就可以看作是物體在時刻 t 的瞬時速度的一個很好的近似值。說得確切一些，就是：我們可以認爲改變量 Δt 越小，量 (1) 就越近似於我們理想的物體在時刻 t 的速度；或者更確切地說，只要我們把時間 Δt 取得充分小，量 (1) 就可以任意地逼近我們要找的物體在時刻 t 的速度。如果用 $v(t)$ 來表示所要找的速度，那麼以上的說法就說明：只要 Δt 充分小，$\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}-v(t)\right|$ 就可以任意小。用極限論的語言來說，就是：當 $\Delta t\to 0$ 時，量 $v(t)$ 是 (1) 式的極限：

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{2}$$

因此，運動着的物體的瞬時速度就是它所走過的路程與時間之比在後者趨向於零時的極限。這樣，我們就建立了瞬時速度的定義，同時也指出了計算它的方法，因而完全解決了我們原來的問題。

註 1.　在公式(2)中，我們必須把 t (即我們希望確定速度的那個時刻)看成是一個常數；極限過程是：時間 Δt 無限制地減小，而作爲這段時間的開始的時刻 t 則不變。當然，這個時刻 t 我們可以任意地選擇，但是一經選好了，在整個計算速度的過程中，它就應該始終保持不變。

註 2.　(2) 式中所說的極限可能存在，也可能不存在，完全依賴於

我們取定的時刻 t 以及函數 $f(t)$ 的類型。如果這個極限不存在，則在相應的時刻，不可能用我們的方法來確定物體的速度。在這種情形下，我們寧願不去找瞬時速度的另外的定義，而乾脆認爲，在這樣的時刻沒有瞬時速度。

例 1. (等加速度運動——眞空中的自由落體)。$s=f(t)=\frac{gt^2}{2}$，其中 g 是一個常數(所謂"重力加速度")：

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=gt\,\Delta t+\frac{g(\Delta t)^2}{2};$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=gt+g\frac{\Delta t}{2};$$

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt.$$

因此，在眞空中自由落體的速度隨時間而增大，並且與經過的時間成正比。

例 2. (簡諧振動)，$s=f(t)=a\sin\omega t$ (其中 a 與 ω 都是正的常數)。

這裏 s 是運動着的物體從選定的起點算起的距離，一個方向(例如向右)的距離算正的，另一個方向(向左)的距離算是負的。

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)=a\sin\omega(t+\Delta t)-a\sin\omega t=$$
$$=2a\cos\omega\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\omega\Delta t}{2};$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=a\omega\cos\omega\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\frac{\sin\frac{\omega\Delta t}{2}}{\frac{\omega\Delta t}{2}};$$

$$v(t)=a\omega\cos\omega t.$$

在這個例子中，運動着的物體(如果假定是在一條直線上運動)，顯然在 $s=a$ 和 $s=-a$ 之間不停地振動(固定振幅的非阻尼振動)。按照我們安排好的關於 s 的符號，很自然的，當物體自左向右運動時，我們

的速度是正的，而在相反的方向則運動速度是負的。在點 $s=\pm a$ 時，我們應當有 $\sin\omega t=\pm 1$，也就是說 $\cos\omega t=0$；因此在這些點瞬時速度等於零。這倒是很自然的，因為在這些點，運動改變方向，從而也就改變速度的符號。當 $\cos\omega t=\pm 1$ 時，物體有最大的速度 $|v(t)|=a\omega$；在這些時刻 $s=a\sin\omega t=0$，也就是說，物體在這些時刻經過起點。

§ 27. 非均勻棒的局部密度

在物理上，形狀接近於直線段的物體稱為棒；棒的橫斷面很小而且在任何部位都是一樣的。如果一個棒的任何長度相同的兩段都有相同的質量(或者，另一種說法，相同的重量)，我們就說這個棒是均勻的；對於均勻的棒，它的任何一段的質量都與它的長度成正比，所以任何一段的質量與它的長度之比都得到同一個常數 d。這個量 d 可以看作是棒的單位長的質量；稱為均勻棒的密度。

如果一個棒是非均勻的，換句話說，在棒的某些地方物質分佈得密一些，而有些地方則不太密，於是棒的同樣長度的兩段，一般說來，就有不同的質量。而每一段的質量與它的長度之比對於不同的段就不相同；很自然地，我們把這個比值稱為棒的給定的這一段的平均密度。因為在給定的這一段上，物質的密度可能不止一次地並且顯著地變動着，因此，這一段的平均密度，一般說來，並不能使我們知道在這一段上的這一個或那一個個別的點的鄰近，物質分佈得多麼密，這跟前節中汽車在一小時內的平均速度，並不能使我們作出任何關於汽車在給定的時刻的速度的結論完全一樣。

因此，要想刻劃出在棒上的某個確定的點的鄰近的物質密度，我們就遇到與 § 26 中當我們設法估計運動着的物體的瞬時速度時同樣類型的困難。不過，既然新的困難與舊的完全一樣，我們就自然可以指望用同樣的方法來克服這個困難。

我們取棒的一端來作為計算的起點 O，用 x 表示棒上的點對於計

算起點的橫坐標。物質分佈在(O, x)段上的質量是x的一個函數，它隨x的增大而增大；我們把這個函數記作$m=f(x)$。分佈在x與$x+\Delta x$(Δx是任意一個正數)之間的一段上的質量顯然是

$$\Delta m=f(x+\Delta x)-f(x);$$

因此物質在這一段上的平均密度就等於

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

如果Δx很大，在$(x, x+\Delta x)$全段上密度可能有很大的變化，因而我們沒有理由認爲我們所得到的平均密度已經刻劃出棒上點x鄰近的物質密度。但是，如果Δx很小，則我們可以設想，在長度爲Δx的全段中物質的密度來不及發生很大的變化，因而在這一段上的平均密度就很接近我們所想找的，那個能够刻劃出在點x的鄰近的物質密度的數值。當Δx越小，這個見解就越具有說服力；由此，跟前節中一樣，我們有理由得出結論說：棒上點x的鄰近的物質密度就是

$$d(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

(當然需要假定這個極限存在)。這樣確定的量$d(x)$稱爲棒在點x的**局部**(換句話說，地方性的)**密度** ❶。顯然，我們可以把這個局部密度看成當棒的長度增大時，質量的變化速度。這種新的觀點使我們現在的問題與§26中我們解決的問題更加接近起來；它們之間的不同點就只在於在新的問題中完全沒有時間而已；如果說在前面我們曾經找出路程隨着**時間的延續**而變化的瞬時速度，那麼在這裏我們研究的就是棒的質量隨着**長度的增大**而變化的局部密度。時間在這個過程中是不起什麼作用的。因此，我們已經看到，我們完全可以談到一個函數關於自變量的變化速度，而絲毫不管這兩個量的實際意義究竟是什麼。速度概念的這樣一個推廣，對於數學理論來說，是具有決定性的意義的；在下節

❶ "局部的"(地方性的)這個術語在前一章中我們遇到過；它永遠表示這樣的特徵，即在不同的點可以不相同。

中，我們就來詳細地考慮這一點。

§ 28. 導數的定義

假定 $y=f(x)$ 是自變量 x 的任意一個函數。如果當 x 變化時，y 均勻地變化（在這種情形，我們知道 $f(x)$ 一定是 x 的線性函數，$f(x)=$ $=\alpha x+\beta$），則 y 對於 x 變化的速度就是常數 α，等於 y 的改變量與相應的 x 的改變量之比 $\left(\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$．這裏，這個比的值永遠是同一個值，它與起算的值 x 以及 x 的改變量 Δx 都沒有關係。換句話說，不管怎樣選取 x 與 Δx，這個比的值都相同（$=\alpha$）。以上這些在 § 25 中我們就已經知道，而且在那裏我們曾經指出說，一般情形，當 y 非均勻地變化時，關於 y 對於 x 的改變的速度問題，就不能這樣簡單地得到解決。如果我們讓自變量從某個值 x 變到它的新的值 $x+\Delta x$，於是量 y 得到一個改變量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；在非均勻變化的情形，對於不同的線段 $(x, x+\Delta x)$，一般說來，比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是不同的，換句話說，它通常依賴於起算的值 x 以及 x 的改變量 Δx。這個比值刻劃了在線段 $(x, x+\Delta x)$ 上 y 對於 x 的變化的平均速度。如果我們希望求出這個變化的局部速度（就是在自變量的某一個值 x 的鄰近，y 對於 x 變化的速度），則一字一句地重複我們討論過的那兩個例子的全部說法，顯然我們就可以做出結論說，我們應當定義這個速度爲函數的改變量與自變量的改變量之比當後者趨於零時的極限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

在這裏，我們前面在考慮例子時所作的註釋都依然有效。例如只有在上述極限存在的時候，我們才能夠談到局部速度；在相反的情形，速度就根本不存在。又如一般說來，在不同的點（即對於自變量的不同的值 x）局部速度是不同的；在(1)式中，我們也應該把值 x 在整個極限過程中都看作常數（只有 Δx 改變）；不過這個常數是可以任意選擇的，而對於它的不同的選取就得到不同的速度（這就是我們之所以說它是"局

部的")。

用極限過程(1)來定義的局部速度可以是正的，負的，也可以等於零。我們不難知道速度的正負符號的實際意義。事實上，如果當 $\Delta x\to 0$ 時，比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限是正的，於是我們知道(§ 10，定理 2)，對於充分小的 Δx，這個比本身是正的；這就說明，對於 $\Delta x>0$，我們有 $\Delta y>0$，而對於 $\Delta x<0$，有 $\Delta y<0$；說得簡短些，就是不管自變量改變量的符號如何，函數改變量的符號總是跟它一樣。這也就是說，隨着 x 的增大 y 也增大(從而隨着 x 減小 y 也減小)。反過來說，如果速度是負的，則類似的討論就指出，隨着 x 增大，y 應該減小，反之亦然。因此，速度的符號標誌着函數變化的方向(即函數的遞增性或遞減性)。當然，速度的絕對值在一切情形下都代表函數變化的快慢。

最後我們要指出，在以前舉例的時候，我們限制了改變量 Δx 是正的(雖然在 § 26 末尾的具體問題中，對於負的 Δx，全部計算仍然是正確的，並且不難證明。得到的結果還是一樣)。但是在(1)式中的極限過程，我們却永遠了解作是在通常的意義之下的極限，換句話說，就是當 $\Delta x\to+0$ 與 $\Delta x\to-0$ 時，極限都要存在而且這兩個極限要彼此相等；只有在符合這個要求時，我們才認爲函數 y 對於 x 的變化的局部速度是存在的。

這樣，我們就看到了，從純粹數學觀點來看，函數變化的速度的計算總是歸結到某一個確定的極限過程。當給定了函數 $y=f(x)$，又選定了自變量的值 x，則我們的問題就是要去計算極限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

當這個極限存在的時候，一般說來，對於不同的 x 它有不同的值。因此，它也是 x 的一個函數，我們通常把這個函數記作 y' 或 $f'(x)$，稱爲函數 $y=f(x)$ 關於自變量 x 的導數：

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

函數的改變量與自變量的改變量之比，在後者趨向於零時的極限，稱爲函數 $y=f(x)$ 關於自變量 x 的導數。

求已知函數 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 的運算，稱爲這個函數的微分法。要想善於計算在自然界中或在技術過程中所產生的各種變化的速度，我們就應當學會儘可能多的函數的微分法。

函數的微分法是數學分析的重要運算之一，所以我們應該仔細地學習它。關於微分法則的理論以及關於導數的性質的理論合稱爲微分學，它構成數學分析中帶基礎性質的一篇。我們首先應該掌握一系列的一般的微分法則與特殊的微分方法，這些法則與方法使我們能够經過有限個步驟求出非常廣的一類函數（全部初等函數）的導數。下節中我們就來做這件事情。

§ 29. 微分法的法則

在這一節中，我們一方面建立一些微分法的一般方法，同時一方面就隨時求出個別函數的導數，輪流地這樣做，我們就可以漸漸地學會應該如何去求非常廣泛的一類函數的導數。

1. **常量的導數**　常量的導數等於零。

確切地說：如果函數 $y=f(x)$ 在某個包含點 x 的區間上是常量，則 $y'=f'(x)=0$。因爲當 $|\Delta x|$ 充分小時，$f(x+\Delta x)=f(x)$，卽 $\Delta y=0$；所以當 $\Delta x\neq 0$ 時，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$。所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$。

2. **冪函數的導數**　如果 $y=x^n$（其中 n 是正整數），則 $y'=nx^{n-1}$。

因爲根據牛頓二項式公式：

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,$$

所以當 $\Delta x\neq 0$ 時，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}.$$

在這個等式的右端，從第二項起的各項都含有因子 Δx，所以當 $\Delta x\to 0$ 時，這些項都趨向於零。因而

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}.$$

3. **代數和的導數** 如果

$$y=u_1\pm u_2\pm\cdots\pm u_n,$$

其中 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 都是 x 的函數，並且在點 x 都有導數，則函數 y 在點 x 一定有導數，並且

$$y'=u_1'\pm u_2'\pm\cdots\pm u_n'.$$

換句話說：代數和的導數等於導數的代數和。事實上，因為當 x 有改變量 Δx 時，函數 $u_1, u_2, \cdots u_n, y$ 依次得到改變量 $\Delta u_1, \Delta u_2, \cdots \Delta u_n, \Delta y$。當自變量取新值 $x+\Delta x$ 時，根據(1)式我們有：

$$y+\Delta y=(u_1+\Delta u_1)\pm(u_2+\Delta u_2)\pm\cdots\pm(u_n+\Delta u_n). \qquad (2)$$

從(2)式減去(1)式，就得到：

$$\Delta y=\Delta u_1\pm\Delta u_2\pm\cdots\pm\Delta u_n,$$

所以當 $\Delta x\neq 0$ 時，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u_1}{\Delta x}\pm\frac{\Delta u_2}{\Delta x}\pm\cdots\pm\frac{\Delta u_n}{\Delta x};$$

最後，讓 $\Delta x\to 0$ 取極限，就證明了 y' 存在而且

$$y'=u_1'\pm u_2'\pm\cdots\pm u_n'.$$

4. 常數因子可以挪到微分號的外面來。確切地說，如果 $y=au$，其中 a 是一個常數，u 是 x 的函數並且在某一點導數存在，則在這一點 y' 存在並且 $y'=au'$。事實上，因為當 x 有改變量 Δx 時，u 與 y 分別得到改變量 Δu 與 Δy。於是

$$y+\Delta y=a(u+\Delta u);$$

從這個等式逐項減去 $y=au$，就得到

$$\Delta y=a\Delta u,$$

因此，當 $\Delta x \neq 0$ 時，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

最後，讓 $\Delta x\to 0$ 取極限，我們就看出 y' 存在，而且 $y'=au'$。

5. 多項式的導數　以上建立起來的四個法則已經可以導出一個非常重要的結果：它們說明了每一個多項式 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 對於 x 的每一個值都有導數，並且可以馬上寫出這個導數。因為應用這些法則，我們不難得到

$$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

因此，**多項式的導數仍然是多項式，並且它的次數比原來的多項式的次數少一**。

6. 乘積的導數　假定 $y=uv$，其中 u 與 v 都是 x 的函數並且在點 x 導數存在。利用我們熟習的記號，就有：

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v),$$

由這個等式減去 $y=uv$，就得到

$$\Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v,$$

即當 $\Delta x\neq 0$ 時，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

當 $\Delta x\to 0$ 時，我們應該把右端的 u 與 v 看成是常量(因為它們依賴於 x 而不依賴於 Δx)，但是 Δu 與 Δv 都趨向於零（這可以從 §11 的定理 8 得到，因為根據假定，$\frac{\Delta u}{\Delta x}$ 與 $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ 的極限都存在)。所以右端最後一項的極限等於 $0\cdot v'=0$，因而取極限就得到：

$$y'=uv'+vu';$$

兩個函數的乘積的導數等於第一個因子乘第二個因子的導數再加上第二個因子乘第一個因子的導數。

附註． 這裏並沒有事先假定導數 y' 的存在，而是像在法則 3 與 4 的證明中一樣，在證明的過程中肯定了它的存在。因此，這個法則的完

整的敘述形式應該是：如果函數 u 與 v 在某一點都有導數，則函數 $y=uv$ 在這一點也有導數而且 $y'=uv'+vu'$。以下凡是遇到這種類型的法則，我們都應該採取這個附註中所說的看法。

利用數學歸納法，我們可以把上述法則推廣到任意有限多個因子的乘積的情形，不過我們把證明留給讀者自己去完成：

如果 $y=u_1u_2\cdots u_n$，則（當函數 $u_1, u_2, \cdots u_n$ 的導數都存在時）

$$y'=u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_n';$$

換句話說，任意有限多個因子的乘積的導數就是，任意取一個因子的導數乘上全部其它的因子的乘積，然後把所有可能的這種乘積加起來的和。

我們再建議讀者作爲一個練習來證明法則 2 與 4 都是上述法則的特別情形，這種在新的更爲廣泛的基礎上來重新論證舊的結果，永遠是富有啓發性的，而且也常常是驗證我們所得到的結果是否互相符合的很好的辦法。

7. 商的導數　假定 $y=\frac{u}{v}$，其中 u 與 v 都是 x 的函數而且在點 x 都有導數，並且在這一點 $v\neq 0$。引用我們習慣的記號：

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

從這個等式減去 $y=\frac{u}{v}$，就得到：

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

所以當 $\Delta x\neq 0$ 時，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)};$$

這裏跟前面的情形一樣，當 $\Delta x\to 0$ 時，u 與 v 都是常量，而 $\Delta v\to 0$；因此，取極限，就證明了 y' 存在並且導數的表達式是

$$y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}. \tag{3}$$

特別當 u 與 v 都是多項式時，則比式 $\frac{u}{v}$ 是一個有理分式；於是公式(3)說明了：有理分式的導數總是有理分式。

8. **三角函數的導數**　a) 假定 $y=\sin x$。於是

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x),$$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

當 $\Delta x\to 0$ 時，後一個因子的極限是1；又根據函數 $\cos x$ 的連續性(參考§24)

$$\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\to\cos x\quad(\Delta x\to 0),$$

所以取極限，就證明了 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=y'$ 存在，並且

$$y'=\cos x.$$

б) 現在假定 $y=\cos x$；完全類似的計算，就得到

$$y'=-\sin x.$$

我們把證明留給讀者去完成。

в) 假定 $y=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$；我們的討論對象是兩個函數之比，它們的導數我們是會求的；令 $\sin x=u$，$\cos x=v$，於是根據公式(3)就得到：

$$y'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

г) 如果 $y=\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$，完全類似的計算可以得到：

$$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

讀者不難自己去求出函數 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 與 $y=\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}$ 的

導數。

9. 在繼續進行研究函數的導數之前，我們有必要引進一個非常重要的極限。在 §17 中，我們曾經證明了當 n 通過自然數列無限增大時，表達式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的極限存在，並且把它記作 e 了；現在假定在表達式 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 中，變量 x 通過一切的中間數值無限增大 $(x\to+\infty)$，我們要證明在這個情形下，我們還有：

$$\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{4}$$

事實上，對於任何一個 x 的值，我們用 n 來記不超過它的最大整數，卽

$$n\leqslant x<n+1.$$

於是對於 $x\geqslant1$，顯然有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

或卽

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

當 $x\to+\infty$ 時，顯然也有 $n\to+\infty$；在上列不等式中，左端的分子以 e 為極限，而分母的極限是 1，右端的第一個因子趨向於 e，第二個趨向於 1。因此，當 $x\to+\infty$ 時，左右兩端都以 e 為極限，因而不等式的中間也要趨向於這個極限，這就證明了 (4) 式。

現在假定 $x\to-\infty$，我們令 $y=-x$，則 $y\to+\infty$，因而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^y=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right);$$

當 $y\to+\infty$ 時，右端第一個因子的極限是 e（因為 $y-1\to+\infty$），而第

二個因子顯然趨向於1；這就證明了

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\to e \qquad (x\to-\infty)$$

因此，只要 $|x|\to+\infty$，不管 x 的符號怎樣，(4)式都成立。

現在假定在表達式

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

中，變量 α 以任何方式趨向於零（我們只允許 $\alpha\neq0$，因為當 $\alpha=0$ 時，所寫的表達式沒有意義）；令 $\frac{1}{\alpha}=x$，我們就有：

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x};$$

當 $\alpha\to0$ 時，$|x|\to+\infty$，所以按照上面所證明的結果，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\to e$；因此，上面這個等式證明了

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \tag{5}$$

我們的目的就是要得到這個結果；馬上我們就要用到它。

10. **對數函數的導數**　假定 $y=\lg_a x$，其中 a 是一個不等於1的正數，又 $x>0$。於是

$$y+\Delta y=\lg_a(x+\Delta x),$$

$$\Delta y=\lg_a(x+\Delta x)-\lg_a x=\lg_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\lg_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\lg_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\lg_a\left\{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}.$$

令 $\frac{\Delta x}{x}=\alpha$，於是當 $\Delta x\to0$ 時，$\alpha\to0$，因此根據(5)式

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\to e;$$

又因為函數 $\lg_a x$ 是連續的，所以

$$\lg_a\left\{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}\to\lg_a e \quad (\Delta x\to0);$$

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=y'$ 存在，並且

$$y'=\frac{1}{x}\lg_a e.$$

這個結果的一個特別值得注意的地方是：超越函數 $\lg_a x$ 的導數是一個非常簡單的有理分式 $\frac{c}{x}$，其中 c 是一個常數。如果我們取 e 作爲對數的底，這個導數還可以得到更加簡單的形式，因爲 $\lg_a e=\lg_e e=1$，所以

$$y'=\frac{1}{x}.$$

以後我們還會看到，如果取 e 作爲對數的底，許多其他的分析公式也將變得特別簡單。因此在分析中幾乎總是取 e 來作爲對數的底。以 e 爲底的對數叫做"自然對數"；我們把數 x 的自然對數記作 $\ln x$。因此，如果 $y=\ln x$，就有 $y'=\frac{1}{x}$。如果 $y=\lg_a x$，我們已經知道

$$y'=\frac{1}{x}\lg_a e;$$

但是由於 $a=e^{\ln a}$，取以 a 爲底的對數，我們得到

$$\lg_a a=1=\ln a\lg_a e,\quad \lg_a e=\frac{1}{\ln a},$$

因此我們可以把上述等式寫成

$$y'=\frac{1}{x\ln a}.$$

11. **複合函數的導數** 假定 y 是 x 的一個複合函數，即 y 是某個中間變量 u 的函數，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函數，$u=\varphi(x)$，也就是

$$y=f[\varphi(x)]. \tag{6}$$

我們的問題是：已經知道了函數 $f(u)$ 與 $\varphi(x)$ 的導數（即 y 對 u 以及 u 對 x 的導數），要來求函數 (6) 的導數（即 y 對 x 的導數）。

假定給予變量 x 一個改變量 Δx；於是變量 u 得到一個確定的改變量 Δu，又從 Δu，y 也得到一個改變量 Δy；這裏，只要 $\Delta x\to 0$，就有

$\Delta u\to 0$，$\Delta y\to 0$。現在令

$$\alpha=\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}-f'(u), & 當\ \Delta u\neq 0\ 時,\\ 0, & 當\ \Delta u=0\ 時,\end{cases}$$

因爲當 $\Delta u\to 0$ 時，$\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\to f'(u)$，所以很明顯，當 $\Delta x\to 0$ 時，$\alpha\to 0$；又，當 $\Delta u\neq 0$ 時，由 α 的定義推出

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\,\Delta u;$$

但是立刻可看出，這個等式即使當 $\Delta u=0$ 時也還是成立，所以它永遠是成立的。在這個等式的兩端都用 Δx 除，就得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x};$$

但是當 $\Delta x\to 0$ 時，$\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\to\varphi'(x)$ 又 $\alpha\to 0$；因此取極限就證明了 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)=y'$ 存在而且

$$y'=f'(u)\varphi'(x)=f'[\varphi(x)]\varphi'(x). \tag{7}$$

因此，**複合函數的導數等於已知函數對中間變量的導數乘以中間變量對自變量的導數**。於是，要想求由兩個環節 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 構成的複合函數的導數，只要對每個環節分別求導數，再把它們乘起來就行了。

例 1. $y=\sin kx$，其中 k 是一個常數。令 $kx=u$，於是

$$y=\sin u,\quad u=kx;$$

由公式(7)，就得到：

$$y'=\cos u\cdot k=k\cos kx.$$

例 2. $y=\ln\cos x$，$\cos x=u$，$y=\ln u$。根據公式(7)

$$y'=\frac{1}{u}(-\sin x)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x.$$

利用數學歸納法，我們可以把上述複合函數的微分法則推廣到由三個或更多的環節組成的複合函數。比如說，如果

$$y=f(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x),$$

則 y 對 x 的導數就是

$$y'=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x)=f'\{\varphi[\psi(x)]\}\varphi'[\psi(x)]\psi'(x).$$

12. **反函數的導數** 我們知道，用來定義 y 是 x 的函數的關係式，在某些情形下，可以反過來定義 x 是 y 的函數（原來函數的反函數）。現在假定 $y=f(x)$，又它有一個反函數是 $x=\varphi(y)$。假定在某一點 $x=$ $=\varphi(y)$，導數 $f'(x)$ 存在並且不等於零，又量 y 的改變量 Δy 對應於變量 x 的改變量 Δx。於是因爲 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，所以當 $\Delta y\neq 0$ 時，也一定有 $\Delta x\neq 0$。因此當 $\Delta y\neq 0$ 時

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{8}$$

現在假定 $\Delta y\to 0$；如果函數 $x=\varphi(y)$ 在點 y 連續，我們就有 $\Delta x\to 0$，從而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x)\neq 0;$$

因此 (8) 式證明了，當 $\Delta y\to 0$ 時，$\frac{\Delta x}{\Delta y}$ 趨向於 $\frac{1}{f'(x)}$；換句話說，導數 $\varphi'(y)$ 存在並且等於 $\frac{1}{f'(x)}$。因此，我們得到了下述求反函數的導數的法則：

如果函數 $y=f(x)$ 在點 x 有不等於零的導數，並且反函數 $x=\varphi(y)$ 在點 y 連續，則 $\varphi'(y)$ 存在並且等於 $\frac{1}{f'(x)}$。

13. **指數函數的導數** 假定 $y=a^x$，其中 a 是一個正的常數。於是 $x=\lg_a y$；根據 10，x 對 y 的導數是

$$x'=\frac{1}{y\ln a};$$

根據剛才證明的反函數的微分法則，我們就得到

$$y'=\frac{1}{x'}=y\ln a=a^x\ln a.$$

特別當 $y=e^x$ 時，$y'=e^x$，換句話說，"最簡單的"指數函數，對於微分

運算來說是不變的：這個函數的導數等於它自己。

如果 $y=e^{\alpha x}$，其中 α 是一個常數，則我們可以令 $\alpha x=u$，把 y 當做 x 的一個複合函數來看，於是根據公式(7)不難得到：

$$y'=\alpha e^{\alpha x}=\alpha y.$$

在實際應用中，常常遇到所謂"雙曲線函數"——"雙曲線餘弦"

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

與"雙曲線正弦"

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

讀者不難證明，在這兩個函數中每一個是另一個的導數。

14. **任意冪函數的導數**　假定 $y=x^{\alpha}$，其中 α 是任意一個常數。在第二段中，我們已經看到，當 α 是一個自然數時，

$$y'=\alpha x^{\alpha-1};$$

現在我們來證明，這個公式對於任何一個 α 都是對的。

我們可以寫

$$y=x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x};$$

令 $\alpha \ln x=u$，於是我們有：

$$y=e^{u},\ u=\alpha \ln x,$$

因而按照複合函數的微分法則

$$y'=e^{u}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1},$$

這就是我們要證明的。

特別當 $\alpha=\frac{1}{2}$ 時，我們有：

$$y=\sqrt{x},\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

當 $\alpha=-1$ 時，$y=\frac{1}{x}$，$y'=-\frac{1}{x^{2}}$ 等等。

用這個方法還可以求更廣泛的一類函數

$$y=\{f(x)\}^{\varphi(x)}$$

的導數，其中 $f(x)$ 與 $\varphi(x)$ 都是可以微分的函數。因爲

$$y=e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^u,\quad u=\varphi(x)\ln f(x),$$

所以根據複合函數的微分法則，

$$y'=e^u\{\varphi(x)\ln f(x)\}'=\{f(x)\}^{\varphi(x)}\left\{\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+\varphi'(x)\ln f(x)\right\}.$$

例. $y=x^x$, $y'=x^x(1+\ln x)$.

15. 反三角函數的導數。

a) 假定 $y=\operatorname{arc}\sin x\ (-1<x<+1)$，於是當 x 通過區間 $(-1, +1)$ 時，y 由 $-\frac{\pi}{2}$ 遞增到 $+\frac{\pi}{2}$。因爲在這種情形下 $x=\sin y$，所以根據第 11 段中的求得的法則

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

這裏根式必須取正號，因爲當 $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$ 時，$\cos y>0$。所以如果 $y=\operatorname{arc}\sin x$，則

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(-1<x<1).$$

用完全類似的方法，我們不難得到：

б) 如果 $y=\operatorname{arc}\cos x$，則

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(-1<x<1);$$

в) 如果 $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$，則

$$y'=\frac{1}{1+x^2}\qquad(-\infty<x<+\infty);$$

г) 如果 $y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$，則

$$y'=-\frac{1}{1+x^2}\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

附註 1. 值得注意的是：反三角函數是超越函數，但是它的導數却是很簡單的代數函數（在 $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ 與 $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$ 的情形甚至是有理函數）（在對數函數的微分法中，我們已經遇到過類似的情形）。

附註 2. 我們還應該注意到這個事實，函數 $\arcsin x$ 與 $\arccos x$ 的導數只差一個符號（函數 $\operatorname{arc\,tg} x$ 與 $\operatorname{arc\,ctg} x$ 的導數也是這樣）；其實我們不難預見到這個事實，只要我們微分下列著名的三角恆等式

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{\pi}{2}.$$

16. 在這一章中，我們學會了全部簡單的初等函數的微分法；我們把這些函數的導數列成下面的表：

y	y'	y	y'	y	y'	y	y'
c	0	a^x	$a^x\ln a$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
x^μ	$\mu x^{\mu-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arc\,ctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\lg_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$				

在求出這些函數的導數的同時，我們還證明了一系列微分學的一般法則，利用這些法則，我們不難求出由這些函數經過任意有限多次代數運算與複合函數構成的任何組合的導數。為了使得讀者能夠估計現在已經學會了的可以微分的這類函數究竟有多麼廣，我們建議讀者作為一個練習努力去找出這樣的函數，關於它的導數我們還不會求。這個問題的艱難程度就說明了現在我們微分函數的本領已經完備到了一個什麼樣的地步。然而，在原則上這個本領還是不够的；每個數學家必須學會微分得很快而且不發生錯誤，為此，我們就必須做大量的練習。

在 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第二章，§ 1 中有大量的關於函數的微分法的練習。除了做完習題 14—68 外，我們還願意建議讀者去仔細思索並且解決幾個像習題 72, 73, 79, 90, 91 這一類的問題。

§ 30. 存在問題與幾何解釋

一個函數 $y=f(x)$ 在點 x 有導數，需要而且也只要極限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$$

存在。首先不難證明，這個極限存在時，函數 $f(x)$ 一定在點 x 連續；因為根據 § 11，定理 8，當 $\Delta x\to 0$ 時，由比式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限存在，就可以推出當 $\Delta x\to 0$ 時，改變量 Δy 必然是一個無窮小量；而這就說明，函數 $y=f(x)$ 在點 x 連續。因此，在一個函數的間斷點處，這個函數是不可能有導數的；特別是，一個到處都不連續的函數就到處都沒有導數存在(例如 §§ 4，20 中的函數 $D(x)$)。

連續函數是否也可能沒有導數呢？不難證明，這種情形也是可能的。因為首先以下這種情形還是可能發生(並且是常常發生)的，卽極限

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\tag{1}$$

雖然都存在，但是它們彼此不相等。於是當 $\Delta x\to 0$ 時，統一的極限就不存在，而這就說明函數沒有導數。例如，函數 $y=|x|$ 當 $x=0$ 時的情形就是這樣：因為在這一點，$y=0$，所以不妨把 Δy 就寫作 y (Δx 就寫作 x)；於是我們得到：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{x}=\frac{|x|}{x}.$$

對於任何 $x>0$ 這個比值等於 1，而對於任何 $x<0$ 這個比值等於 -1；所以

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

我們還要問，是否可能有這樣一個函數 $y=f(x)$，它在點 x 連續，但是對於它(1)中的兩個極限都不存在，換句話說，它既沒有左導數又沒有右導數？這種情形也是可能的，雖然這個例子是要比較複雜一些

了。我們來考慮一個對於一切 x 都有定義的函數

$$y=f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0). \end{cases}$$

因爲當 $x\neq 0$ 時，

$$|f(x)|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|,$$

所以當 $x\to 0$ 時，$f(x)\to 0$。又因爲 $f(0)=0$，所以函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 連續。跟上面的例子一樣，這裏不妨令 $\Delta x=x$，$\Delta y=y$；因此當 $\Delta x\neq 0$ 時，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{x}=\sin\frac{1}{x}=\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

如果 n 是任意一個自然數，則當

$$\Delta x=\frac{2}{(4n+1)\pi} \tag{2}$$

時，我們有

$$\frac{1}{\Delta x}=2\pi n+\frac{\pi}{2},\quad \sin\frac{1}{\Delta x}=1,$$

而當

$$\Delta x=\frac{2}{(4n-1)\pi} \tag{3}$$

時，則有

$$\frac{1}{\Delta x}=2\pi n-\frac{\pi}{2},\quad \sin\frac{1}{\Delta x}=-1.$$

因爲當 $\Delta x\to +0$ 時，隨着 n 的增大，Δx 無限多次地取(2)式與(3)式中那種形式的值；所以比式

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

無限多次地在 $+1$ 和 -1 之間振動，從而它不可能趨向於任何極限。這就說明，對於我們現在討論的函數來說，(1)式的第一個極限就不存在；同樣的辦法可以證明第二個極限也不存在。

在以上考慮的這個例子中，已知函數只在一點(對於 x 的一個值)沒有導數，而在全部其他的點導數都是存在的。當然，以這種例子爲基礎，我們不難選出有兩個，三個，一般說來，任意多個點沒有導數的連續函數。然而，在歷史上一個很長的時期中，人們曾經認爲，一個連續函數，除去幾個個別的點之外，應該到處都有導數；人們之所以這樣想，首先是根據幾何圖形的直觀印象(關於圖形我們以下馬上就要考慮)；還是直到上一世紀的後半期，才有人發表了一個到處都沒有導數的連續函數的例子。到了今天，我們已經有許多種不同的方法來構造這一類的函數，不過所有這些方法都過於複雜，我們在這裏不可能來敍述它們。

我們知道，函數的幾何表示法是研究函數的一個非常有用的工具，因爲許多函數的動態用公式來表達時是不容易認識的(至於用列表法就更難了)，但是在函數的圖形上，它們就完全直觀地顯示了出來，因而一看就可以明白。函數的任何特性，在這個函數用圖形來表示時，都應當表現爲函數圖形(曲線)的某種幾何性質。特別，我們可以預料得到，在一個函數的圖形上，這個函數的導數也應該能够得到直觀的解釋。導數的這個幾何解釋，對於分析或者對於幾何都同樣的重要，下面我們就來考慮這個幾何解釋。

假定我們在一個笛卡兒坐標系(x, y)中作出函數 $y=f(x)$ 的圖形(圖 12)。我們來看曲線上的點 $M(x, y)$ 與點 $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$。引平行於 OX 軸的直線 MP。顯然在直角三角形 MNP 中，夾直角的兩邊 $MP=\Delta x$，$NP=\Delta y$。因而比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等於角 φ 的正切，φ 是弦 MN 與 OX 軸的正方向之間的夾角。

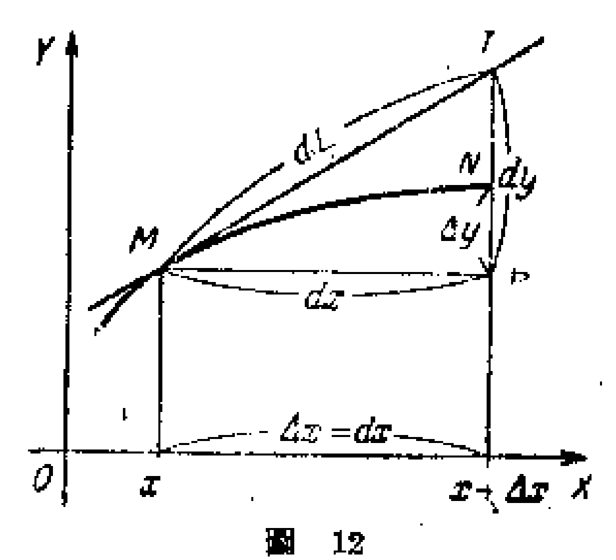


圖 12

現在讓 Δx 趨向於零。這時，點 M 保持不動，而點 N 無限地逼近 M。弦 MN 也不斷改變它的方向，不過在這

個過程中的每一個時刻，都有這個弦的斜率

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

如果已知函數 $f(x)$ 在點 x 有導數，換句話說，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

存在，則在幾何上來說，就表明弦 MN 要趨向於某一個極限方向 MT，它與 OX 軸的正方向的交角是 α，而且

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{tg}\,\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y' \qquad (4)$$

直線 MT 稱爲已知曲線在點 M 上的切線，它可以純粹幾何地規定爲聯結已知曲線上的點 M 與一個無限地逼近於 M 的點 N 的割線 MN 的極限位置。等式(4)說明，函數 $f(x)$ 在點 x 的導數，等於對應的曲線上以 x 爲橫坐標的那一點上的切線的斜率。如果像我們通常那樣做法，把切線的方向就算作(直觀上看來完全正確)是曲線在這一點的方向，則我們立刻看到：如果(當 x 增大時，亦即從左到右)曲線上升，則它的導數是非負的，而且曲線越陡，導數的值也就越大；反之，如果曲線(自左到右)下降，則導數是非正的，曲線越向下傾斜，導數的絕對值越大。以上這個幾何事實與我們在本章一開始就提到的 y 關於 x 的變化速度的看法是完全一致的；當 x 增大時，y 增大得越快，曲線 $y=f(x)$ 也就越陡，從而上升的速度 y' 也就越大。

上述的導數的幾何意義還使得我們能夠直觀地來了解我們在這一節開始時所討論的那些導數不存在的例子。在圖 13 中我們作出了函數 $y=|x|$ 的圖形，圖 14 中則是函數 $y=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 的圖形。在第一個例子中，曲線 $y=|x|$ 在 $x=0$ 有一個向右的確定的方向，也有一個向左的確定的方向，但是這兩個方向不一樣；在第二個例子的情形，曲線 $y=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在點 $x=0$ 既沒有向右的，也沒有向左的確定的方向(切線不存在)，因爲當 $|x|$ 越來越小時，割線的方向一再地在直線 $y=x$ 與

$y=-x$ 之間搖擺不定，因而不可能趨向於一個確定的極限方向。

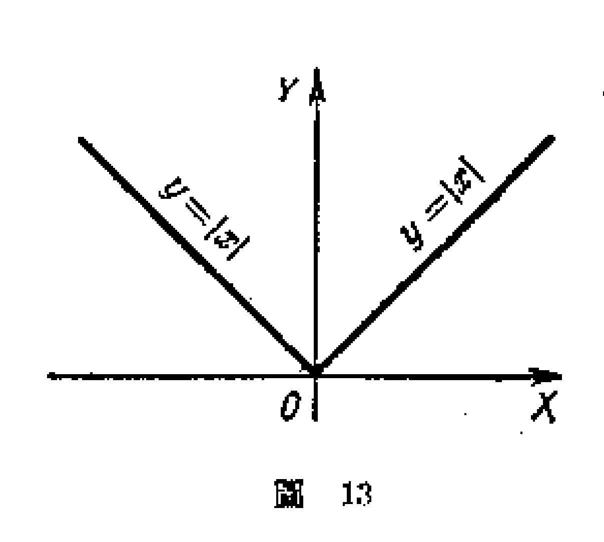


圖 13

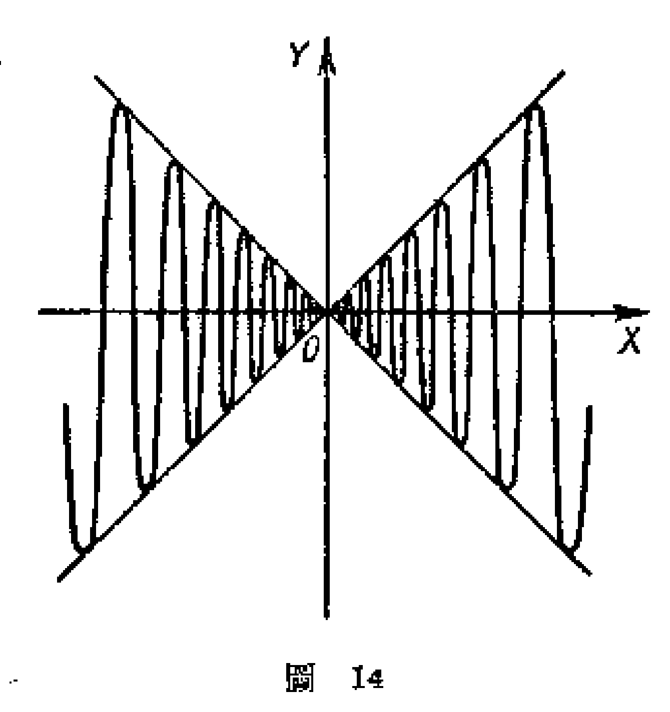


圖 14

最後，從導數的幾何表示來看，我們就容易領會爲什麽人們能够在一個漫長的時期中，堅信每一個連續函數（除去可能有幾個特別點之外）應該到處都有導數。事實上是由於很難想像一條到處都沒有切線的連續曲線；甚至於就是在今天，我們已經肯定地知道這樣的曲線的確是存在的，但是我們也只能想像出它的一個非常粗糙的輪廓；這種曲線在它的每一點的附近的情形都是像圖 14 中的曲線在點 O 的隣近的情形那樣。但是無論如何，這種曲線畢竟是存在的，數學家之發現這種曲線在數學史中是一個光輝的榜樣，它們揭露了統治着整個時代的直觀方法是不可靠的。

最後，我們還要指出：關於在點 x 導數 y' 的知識，使我們能够用初等方法來畫出曲線 $y=f(x)$ 在點 M 的切線。在初等幾何學中我們學會了畫圓周的切線，在解析幾何學中我們又學會了畫二次曲線的切線，但是只有在微分學中，才提出了並解決了畫任意曲線在它的任意一點上的切線的問題。

第七章　微　　分

§ 31. 定義及其與導數的關係

如果函數 $y=f(x)$ 在點 x 有導數，

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

則當 $\Delta x\to 0$ 時，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'=\alpha$$

是一個無窮小量。由此可見，

$$\Delta y-y'\,\Delta x=\alpha\,\Delta x$$

是一個比 Δx 高級的無窮小量；利用在 § 12 中引進的符號，我們可以把這個量記作 $o(\Delta x)$；於是

$$\Delta y=y'\Delta x+o(\Delta x). \tag{1}$$

因爲 $y'=f'(x)$ 只依賴於 x，當 $\Delta x\to 0$ 時，它保持不變，所以 $y'\Delta x$ 與 Δx 成比例；因此(1)式說明：**在點 x 具有導數的函數的改變量，在點 x 可以表作兩個量之和，其中一個與 Δx 成比例，另一個是比 Δx 高級的一個無窮小量。**

反之，**如果在已知點 x，函數 $y=f(x)$ 的改變量可以表作**

$$\Delta y=a\,\Delta x+o(\Delta x), \tag{2}$$

其中 a 不依賴於 Δx，則函數 y 在點 x 是可微的，並且 $f'(x)=a$。 這是因爲由(2)可以推出

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a+o(1).$$

所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to a\qquad(\Delta x\to 0),$$

也就是說，$y'=a$。

例 1. $f(x)=\ln x$；根據公式(1)，$f(1+y)-f(1)=f'(1)y+o(y)$ $(y\to 0)$；但是 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，所以我們得到：

$$\ln(1+y)=y+o(y)$$

或即

$$\ln(1+y)\sim y \quad (y\to 0)$$

這個重要的性質，只有自然對數函數才具有；就因爲這樣，在數學分析中採用自然對數有特出的方便之處。

例 2. $f(x)=e^x$；根據公式(1)，$f(x)-f(0)=f'(0)x+o(x)$ $(x\to 0)$；但是 $f(0)=f'(0)=1$，所以我們得到：

$$e^x-1=x+o(x),$$

或即

$$e^x-1\sim x \qquad (x\to 0).$$

改變量 Δy 的表達式(1)是非常重要的，因爲它指出了函數的改變量在精確到相差一個高級無窮小量的程度內，可以近似地表作自變量的改變量的線性函數。這個表達式中跟 Δx 成比例的第一項 $y'\Delta x$ 叫做函數 y 的微分，記作 dy，所以

$$\Delta y=dy+o(\Delta x). \tag{3}$$

因此，函數的導數與自變量的改變量的乘積就叫做這個函數的微分，例如，

$$d\sin x=\cos x\,\Delta x,$$

$$d\ln x=\frac{\Delta x}{x}$$

等等。從以上這些，我們可以看出來，要確定函數的微分，無論自變量 x 的初值，或者自變量的改變量 Δx 都必須給定；只有這樣給定後，函數的微分才能完全確定，並加以計算。

在前面我們已經看到，如果函數 y 的改變量 Δy 可以表作(2)式，則右邊的第一項就是 $y'\Delta x=dy$；所以函數在已知點的微分可以直接規

定爲：與 Δx 成比例並且與 Δy 相差一個比 Δx 高級的無窮小量的量。這樣一個量通常被叫做改變量 Δy 的主要線性部分。因此可以說，函數的改變量的主要線性部分叫做函數的微分(對於已知的 x 與 Δx)。同時我們還看到，函數在已知點是可微的，必須並且只須它在這一點的改變量具有主要線性部分。

這個把微分規定成改變量的主要線性部分的定義是非常重要的，因爲微分的全部重要應用都建立在這個基礎之上。以後我們會看到，在多元函數的情形，導數存在與改變量的主要線性部分的存在所要求的條件並不是一樣的；值得特別提出的是，到那時候我們就會看到，多元函數的可微性不是規定成它的導數的存在，而正是極自然地規定成它的改變量的主要線性部分的存在的。

微分在理論上或在直接實踐(計算)中所起的作用，都以(3)式爲基礎。一般說來，Δy 依賴於 Δx 的情形常常很複雜，對於給定的 x 與 Δx 來計算 Δy 的精確數値通常都很困難。但是，(3)式表明，如果 Δx 很小，就可以用計算 dy 來代替計算 Δy，並且能够達到很好的近似程度，因爲它們的差(也就是這個代替所引起的誤差)是一個比 Δx 高級的無窮小量，因而對於小的 Δx，這個誤差只是要尋求的量的一個極微小的部分(這裏當然要假定 $y'\neq 0$)。計算 dy 照例比計算 Δy 要簡單得不可比擬，因爲 dy 永遠只是 Δx 的線性函數。

現在我們來考慮一個簡單例子。假定我們要近似地計算 $\ln(2+\alpha)$ 的値，其中 α 很小。

函數 $\ln x$ 的微分是 $\frac{\Delta x}{x}$；當 $x=2$ 時，這個微分等於 $\frac{\Delta x}{2}$；所以設 $\Delta x=\alpha$，由公式(3)就得到

$$\ln(2+\alpha)-\ln 2=\frac{\alpha}{2}+o(\alpha),$$

這就說明

$$\ln(2+\alpha)=\ln 2+\frac{\alpha}{2}+o(\alpha);$$

因此，對於充分小的α，只要知道了 $\ln 2$ 我們就可以立刻得到 $\ln(2+\alpha)$ 的很好的近似值；例如

$$\ln 2.001 \approx \ln 2 + 0.0005,$$

$$\ln 2.002 \approx \ln 2 + 0.001,$$

$$\ln 2.003 \approx \ln 2 + 0.0015$$

等等。由此可以很清楚地看出，這個方法能够有些什麼用處，例如說，我們就可以用這個方法來造對數表。當然，在一切這種場合下，我們都還需要估計那個由於用微分 dy 來代替改變量 Δy 所產生的誤差 $o(x)$ 的限度。這種估計要求我們還要進一步發展理論，以後我們就會知道如何進行這種誤差的估計。讀者可以在 Б. П. 提米多維奇的習題集中找到有益的習題：第二章，習題 144，145，159，160，164。

因為函數 $y=x$ 的導數對於 x 的任何值都等於 1，所以對於 x 的任何值，這個函數的微分都是 Δx，因而對函數 $y=x$ 來說，改變量與微分是相等的：❶

$$\Delta x = dx;$$

因此，我們可以在任何函數 $y=f(x)$ 的微分的表達式中，用 dx 代替 Δx；於是有：

$$dy = y'dx,$$

從而得到：

$$y' = \frac{dy}{dx}; \tag{4}$$

即函數的導數等於函數的微分與自變量的微分之比。對導數來說，(4) 式是它的一個合適的記法，跟記號 y' 或 $f'(x)$ 一樣地通用；誠然，它有些複雜，但是它的優點是在記號中清楚地指出了這是對變量 x 的導數。當討論中有同一個函數對不同的變量的導數出現時，這個記號就顯得特別有好處。例如當我們討論由函數 $y=f(u)$ 與 $u=\varphi(x)$ 確定的複合函數（§ 29）的微分法時，在我們的論證中既要引進 y 對自變量 x 的

❶ 顯然，對任何線性函數 $y=\alpha x+\beta$ 來說，都是這樣。

導數，又要引進對中間函數 u 的導數；這時記號 y' 就比較不太合適了，因爲我們不能直接看出來，到底它代表這兩個導數中的那一個；然而要是採用（4）式中的記號，我們就可以分別把這兩種情形記作 $\frac{dy}{dx}$ 與 $\frac{dy}{du}$，這就立刻可以看出是對那一個變量的導數（當然，我們能够採用記號 $\frac{dy}{du}$ 還需要某些根據，這將在 § 33 中予以解決）。

（4）式並且在實質上對於微分學的進一步發展具有重大的意義，在以下幾節中我們就會明白這一點。

§ 32. 幾何解釋與計算法則

正如每一個由函數 $y=f(x)$ 決定的量一樣，函數的微分，當函數用圖形來表示時，也應當有確定的幾何意義。第 15 圖是第 12 圖的一部分。跟第12圖中一樣，MT 是曲線 $y=f(x)$ 在點 $M(x, y)$ 的切線。在直角三角形 MTP 中，邊 TP 等於另一邊 MP 乘以角 α 的正切；因爲 $MP=\Delta x$, $\operatorname{tg}\alpha=y'=f'(x)$；所以

$$TP=y'\,\Delta x=f'(x)\,\Delta x=dy;$$

因此，在我們的圖中，線段 TP 表示函數 $y=f(x)$ 對應於已知值 x 與 Δx 的微分，顯然，它剛好是切線 MT 的縱坐標在 x 到 $x+\Delta x$ 這一段上的改變量（至於函數的改變量則是曲線 $y=f(x)$ 本身的縱坐標在這一段上的改變量）。由於 $\Delta x=dx$，在第 15 圖中，初等三角公式

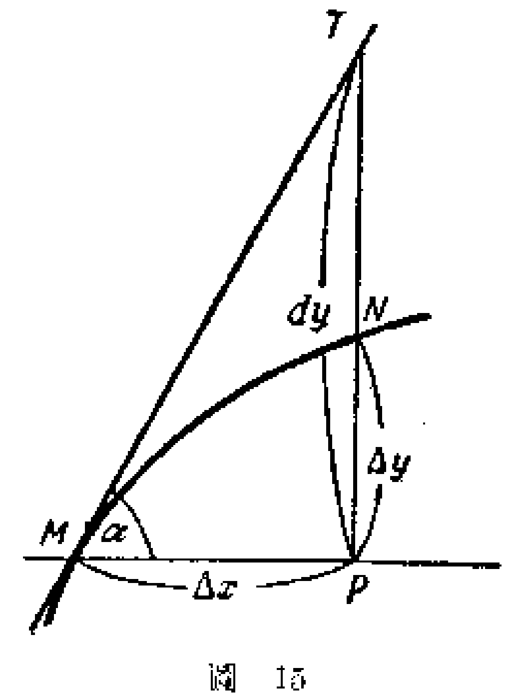


圖 15

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{TP}{MP}$$

說明了 § 31 (4) 式中關於導數與微分之間的關係。

微分在力學上的意義也是很有趣味的。假定 $s=f(t)$ 是某個物體

運動的規律，於是我們知道（參考§26），$s'=f'(t)$ 是這個運動在時間 t 的瞬時速度。距離的微分

$$ds=s'\,\Delta t=f'(t)\,\Delta t$$

顯然就是這個物體，假定保持在時刻 t 的瞬時速度（換句話說，就是假定在從時刻 t 算起的 Δt 這一段時間內，速度保持不變），在 Δt 的時間內，所經過的路程。當我們說汽車在某一個時刻以每小時 40 公里的速度行駛時，其意義就是說：如果在此後的一小時內，汽車都保持現在這一瞬間的速度，則此後的一小時中，汽車將行駛了 40公里。這就說明，40 公里這個數剛好是在已知時刻，汽車行駛的距離（當 $\Delta t=1$ 小時時）的微分。

去求出已知函數的微分，與求出它的導數一樣，也叫做**微分法**。這兩種運算使用同一個名稱，其實是很自然的，因爲如果導數 y' 已經求出了，要得到微分 dy，就只要乘 y' 以給定的 Δx（它是完全單獨地給定，不依賴於 x 的），顯然，任何新的分析計算都不需要。我們在§29 中建立的每一個微分法則（無論是一般的或是特殊的），只要相應地在等式兩邊乘以 $\Delta x=dx$，就可以得到求微分的法則。例如，對於 $y=\sin x$，我們可以從

$$y'=\frac{dy}{dx}=\cos x$$

得到

$$dy=\cos x\,dx;$$

對於 $y=\ln x$，我們從 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ 用同樣方法得到：

$$dy=\frac{dx}{x},$$

等等。如果 $y=y_1\pm y_2\pm\cdots\pm y_n$，由已經證明了的法則

$$y'=y_1'\pm y_2'\pm\cdots\pm y_n',$$

或即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}\pm\frac{dy_2}{dx}\pm\cdots\pm\frac{dy_n}{dx},$$

兩邊乘以 dx, 就得到:

$$dy = dy_1 \pm dy_2 \pm \cdots \pm dy_n$$

(求代數和的微分的法則)。用類似的方法，不難從計算導數的法則導出求函數的積與商的微分的法則:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d(u_1 u_2 \cdots u_n) = du_1(u_2 \cdots u_n) + u_1\,du_2(u_3 \cdots u_n) + $$
$$+ u_1 u_2\,du_3(u_4 \cdots u_n) + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1}\,du_n,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

另外的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第二章，習題 151—156。

§ 33. 導數與微分的關係的不變性

我們已經知道，自變量的微分等於它自己的改變量，所以如果 x 是自變量，函數 $y=f(x)$ 的微分的原來的表達式

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{1}$$

就可以改寫成

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{2}$$

現在假定 x 不是自變量，而是一個新的自變量 t 的某一個(可微的)函數:

$$x = \varphi(t).$$

因爲函數不同於自變量，它的微分與改變量一般說來是不相等的，換句話說，在我們這裏一般應該有 $dx \neq \Delta x$，因此(1)式和(2)式不可能同時成立；在一般情形下，其中至多只能有一個是對的。我們現在證明：無論 $\varphi(t)$ 是什麼樣的(可微)函數，(2)式總是對的。

事實上，如果 $y=f(x)$ 又 $x=\varphi(t)$，其中 t 是自變量，則我們可以把 $y=f[\varphi(t)]$ 當作 t 的複合函數來考慮。如我們所已知的，這個函

數的導數是 $f'(x)\varphi'(t)$，也就是說，它的微分等於

$$dy=f'(x)\varphi'(t)\,dt, \tag{3}$$

但是，在另一方面，我們又有 $x=\varphi(t)$，所以

$$dx=\varphi'(t)\,dt;$$

因此由(3)式就得到

$$dy=f'(x)\,dx,$$

這就是我們要證明的。

因此，(2)式以及和它等價的

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx},$$

無論在 x 是自變量的情形，或者在 x 是任何另一個變量的任何(可微)函數的情形，都同樣成立。我們通常這樣說：導數與微分之間的這個關係在自變量的變換之下不變。

特別值得提一下，由於有了這樣一個不變性，複合函數的微分法則

$$\frac{dy}{dt}=f'(x)\varphi'(t)$$

可以改寫作

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \tag{4}$$

$\left(\text{因為我們現在已經證明了 } f'(x)=\frac{dy}{dx}\right)$；這個法則的這種寫法好像顯然是對的；不過要想用(4)式來證明複合函數的微分法則却是不行的，因為(4)式是(2)式的不變性的推論，而在證明(2)式的不變性時，我們早就引用了複合函數的微分法則了。

第八章　高級導數與高級微分

§ 34. 高級導數

函數 $y=f(x)$ 的導數 $y'=f'(x)$ 仍舊是 x 的一個函數；於是它也有求導數的問題。如果 $y'=f'(x)$ 有導數，我們把這個導數記作 $y''=f''(x)$，稱爲函數 $y=f(x)$ 的**二次導數**或**二級導數**。同樣，如果函數 y'' 的導數存在，我們就說它是原來的函數 $y=f(x)$ 的三級導數；一般說，如果函數 y 的 n 級導數 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ 存在，並且 $y^{(n)}$ 是可微的，我們就把 $y^{(n)}$ 的導數記作 $y^{(n+1)}=f^{(n+1)}(x)$，稱爲原來的函數 $y=f(x)$ 的 $(n+1)$ 級導數（或 $(n+1)$ 次導數）。

在許多精密的自然科學、技術和其他科學與實踐的領域中，高級導數有完全實際的意義。因此，研究它們的性質，掌握求得它們的技巧，就不僅是數學家的事情，而且也是任何知識領域的工作者的事情，只要數學分析在這方面有所應用。在 § 26 中，我們已經看到，如果 $s=f(t)$ 是某個物體運動的規律，那麼 $s'=f'(t)$ 就表示這個物體在時刻 t 的瞬時速度。二次導數 $s''=f''(t)=v'(t)$，卽瞬時速度的導數，按它自己的意義來說，應該是"速度變化的速度"；在力學中這個量叫做**加速度**；它在力學中是非常重要的。因爲按照著名的牛頓定律，加速度與作用到物體上的外力成比例；大量的力學問題都是這樣的：已知作用到物體上的力，要求出在這些力的作用下物體如何運動；由於知道了力無異於知道了加速度，因此典型的力學問題就無非是要根據已知的加速度來探求物體運動的狀況。二級導數還有許多非常重要的幾何應用，以後我們就會知道。

顯然，求高級導數只需要進行一連串通常的微分運算，因此不需要什麼另外的新方法。這裏我們只提出幾個簡單初等函數的有趣的結

果。

1. 在§29中我們已經知道，多項式 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的導數是一個以 na_0x^{n-1} 爲首項的低一次的多項式；每這樣運算一次，次數就減一；特別是 n 級導數

$$y^{(n)}=n!\,a_0$$

是個零次的多項式，換句話說是一個常數；因而，

$$y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\cdots=0,$$

這就是說：對 n 次多項式來說，一切高於 n 級的導數都是零。

2. 我們知道，函數 $y=e^x$ 對於微分運算是不變的 $(y'=y)$。因此對於任何 n，都有 $y^{(n)}=y=e^x$。對於較一般的情形 $y=a^x$，我們有 $y'=$ $=y\ln a$，所以對於任何 n，$y^{(n)}=y(\ln a)^n=a^x(\ln a)^n$。

3. 函數 $y=\sin x$ 的導數是 $y'=\cos x$，函數 $z=\cos x$ 的導數是 $z'=$ $=-\sin x$；所以

$$y''=-\sin x,\ y'''=-\cos x,\ y^{(4)}=\sin x,\ y^{(5)}=\cos x,\ \cdots;$$

由此可見，函數 $\sin x$ 的各級的導數組成了一個週期爲 4 的序列，因此，對於任何 n，都有：

$$y^{(4n)}=\sin x,\ y^{(4n+1)}=\cos x,\ y^{(4n+2)}=-\sin x,\ y^{(4n+3)}=-\cos x;$$

同樣，對於函數 $z=\cos x$，我們也有：

$$z^{(4n)}=\cos x,\ z^{(4n+1)}=-\sin x,\ z^{(4n+2)}=-\cos x,\ z^{(4n+3)}=\sin x;$$

這個序列和上面那個序列只錯開一項。

4. 我們知道，函數 $\ln x$，$\operatorname{arc\,tg} x$，$\operatorname{arc\,ctg} x$ 的導數都是有理分式；因此，這些函數的任何級導數也都是有理分式。同樣，函數 $\arcsin x$ 與 $\arccos x$ 的任何級導數都是代數函數。

5. 一般來說，我們知道，任何初等函數的一級導數都是初等函數；所以任何初等函數的任何級導數也總是初等函數。

6. 很明顯，代數和的微分法則可以毫無改變地適用於求任何級的導數。但是兩個函數之積的逐次微分法則就不再這樣簡單，應該特別

注意。如果 $y=uv$，其中 u 與 v 都是 x 的可微函數，於是我們知道，

$$y'=uv'+vu',$$

由此不難求出：

$$y''=uv''+2u'v'+u''v,$$
$$y'''=uv'''+3u'v''+3u''v'+u'''v;$$

這些等式引起我們去推測：似乎對於任何 n，也應該有：

$$y^{(n)}=\alpha_{n0}uv^{(n)}+\alpha_{n1}u'v^{(n-1)}+\alpha_{n2}u''v^{(n-2)}+\cdots$$
$$\cdots+\alpha_{n,n-1}u^{(n-1)}v'+\alpha_{nn}u^{(n)}v, \qquad (1)$$

其中 α_{n0}，α_{n1}，$\cdots\alpha_{nn}$ 都是不依賴於函數 u 與 v 的常數。我們已經證明了當 $n=1$，2 或 3 時（1）式的確是對的；利用數學歸納法我們不難證明它對於任何 n 也都是對的（證明留給讀者）。剩下來的問題只要去決定這些數 α_{n0}，α_{n1}、$\cdots\alpha_{nn}$。因為它們不依賴於函數 u 與 v，所以我們可以利用任何特別的函數來決定它們。令

$$u=e^x, \quad v=e^{tx},$$

其中 t 是任意一個常數；於是

$$u^{(n)}=e^x, \quad v^{(n)}=t^n e^{tx},$$
$$y=e^{(t+1)x}, \quad y^{(n)}=(t+1)^n e^{(t+1)x},$$

代入公式（1），就得到

$$(t+1)^n e^{(t+1)x}=\alpha_{n0}e^x t^n e^{tx}+\alpha_{n1}e^x t^{n-1}e^{tx}+\alpha_{n2}e^x t^{n-2}e^{tx}+\cdots$$
$$\cdots+\alpha_{nn}e^x e^{tx}=e^{(t+1)x}(\alpha_{n0}t^n+\alpha_{n1}t^{n-1}+\alpha_{n2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_{nn}),$$

所以

$$(t+1)^n=\alpha_{n0}t^n+\alpha_{n1}t^{n-1}+\alpha_{n2}t^{n-2}+\cdots+\alpha_{nn},$$

這裏 t 是任意的；比較這個公式和 $(t+1)^n$ 按照二項式公式的展開式，注意對於兩個恆等的多項式，其相當項的係數應該相等，我們就得到：

$$\alpha_{nk}=C_n^k \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

於是公式（1）就成為

$$y^{(n)}=C_n^0 uv^{(n)}+C_n^1 u'v^{(n-1)}+\cdots+C_n^{n-1}u^{(n-1)}v'+C_n^n u^{(n)}v.$$

這個公式叫做萊布尼茲公式，它把兩個函數之積的 n 級導數，用乘積的兩個因子的不超過 n 級的導數表達了出來。

§ 35. 高級微分及其與導數的關係

高級微分的確定法跟導數情形完全一樣。函數 $y=f(x)$ 的二級微分 d^2y 是它的一級微分的微分，

$$d^2y=d(dy);$$

一般來說，如果函數 y 的 n 級微分已經確定了，則

$$d^{n+1}y=d(d^ny).$$

因爲，我們知道，按照定義 dy 是兩個自變量 x 與 Δx 的函數，所以，用來確定二級微分 d^2y 的表達式 $d(dy)$ 的意義需要有所說明。在進行微分運算 $d(dy)$ 時，我們始終是把 dy 只看作是 x 的函數，Δx 算作是常數；對於以後的各級微分我們都是這樣考慮，而且假定 Δx 始終是同樣的一個。

爲了使得高級微分與相應的導數發生聯繫，首先我們回憶一下：

$$dy=y'\Delta x,$$

換句話說，要求一個函數 y 的微分，先取它對 x 的導數，然後乘以自變量 x 的改變量 Δx，這裏我們再強調一次，x 與 Δx 必須看成是互相獨立的。因此，要想得到函數 y 的二級微分 $d^2y=d(dy)$，我們應該求出 dy 對 x 的導數再乘以 Δx。但是 $dy=y'\Delta x$，其中第二個因子與 x 是無關的，所以在整個乘積對 x 求導數時，Δx 應該看成是常數；因此，$dy=$ $=y'\Delta x$ 對 x 的導數就等於 $y''\Delta x$，從而

$$d^2y=d(dy)=y''(\Delta x)^2;$$

重複這個運算，我們顯然可以得到：

$$d^3y=y'''(\Delta x)^3,$$

一般來說，

$$d^ny=y^{(n)}(\Delta x)^n;$$

換句話說，n 級微分等於同級導數乘以改變量 Δx 的 n 次方。由此，反過來就得到：

$$y^{(n)}=\frac{d^n y}{(\Delta x)^n},$$

如果我們再想起 $dx=\Delta x$，就有：

$$y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}, \tag{1}$$

這裏，分母應該讀作 $(dx)^n$，不過爲了書寫的方便，我們總是把括號省去不寫。因此，n 級導數等於同級微分除以自變量 x 的(一級)微分的 n 次方。

公式(1)是公式 $y'=\frac{dy}{dx}$ 的推廣，並且跟後者一樣，在許多情况下，可以看成是高級導數的較方便的記號。不過，我們知道，對於任何自變量的變換，公式 $y'=\frac{dy}{dx}$ 是不變的(換句話說，當 x 不是自變量，而是某個新變量 t 的函數時，它還是對的)，但是當 $n>1$ 時，公式(1)就不再具有這種不變性了，實際上，它的成立與 x 是自變量這個條件有非常密切的關係。我們可以證明，如果 $x=\varphi(t)$，公式(1)即使當 $n=2$ 時，一般說來就不再是對的了。我們知道，這時(假設 $y=f(x)$)

$$dy=f'(x)dx=f'[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

要想得到二級微分 $d^2y=d(dy)$，我們應該求 dy 對 t 的導數再乘上 dt。於是

$$d^2y=\{f''[\varphi(t)]\varphi'^2(t)+f'[\varphi(t)]\varphi''(t)\}dt^2=$$

$$=f''[\varphi(t)][\varphi'(t)dt]^2+f'[\varphi(t)]\varphi''(t)dt^2=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x,$$

因爲 $\varphi'(t)dt=dx$，$\varphi''(t)dt^2=d^2x$。因此我們得到：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)+f'(x)\frac{d^2x}{dx^2},$$

在 x 是自變量的情形下，我們的結果是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x);$$

這個多出來的一項

$$f'(x)\frac{d^2x}{dx^2}$$

是由於 x 是自變量 t 的函數而產生的;事實上,如果 x 是自變量,就有 $dx=\Delta x$, $d^2x=0$, 這個多出來的一項就沒有了。

我們已經指出過: 求高級導數與高級微分不需要任何在原則上來說是新的方法,因而也就不需要大量的練習。在 Б. П. 捷米多維奇的習題集,第二章, § 5 中,讀者可以找到許多有趣的習題。

第九章　中值定理

§ 36. 有限改變量定理

前三章的對象是微分學計算部分。我們主要學習了如何求導數與微分，並且證明了一些旨在使得這種計算更加方便的一般性定理。現在，在這方面我們已經完成了全部必要的工作，掌握了微分法的技術，就應該更進一步來研究導數與微分的一些更深刻的性質，這些性質是微分學的理論基礎。在那些我們現在就要建立的一般規律性中，有一系列的定理起着基礎的作用，我們把這些定理都叫做"中值定理"。其所以這樣叫法，是因爲在這個或那個條件下，在給定的區間 (a, b) 上可以找到這樣一點 c（也就是 a 與 b 中間的一個值），在這一點我們所討論的函數具有這個或那個性質。在第五章中(定理3，§ 23)，我們已經遇到過這樣的定理：假如函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上連續，又在它的兩個端點函數值的符號不同，則在區間 (a, b) 內部可以找到這樣一點 c，使得 $f(c)=0$。這種類型的一切定理，都沒有給出關於點 c 在區間 (a, b) 內部位置的任何說明，而只是證明了在 (a, b) 內部的確有這樣一個點 c 存在。以下我們就來建立區間 (a, b) 上的可微函數 $f(x)$ 的一些這樣的定理，關於在區間 (a, b) 上的可微性，我們總是這樣了解：在點 a，只要求當 $\Delta x \to +0$ 時，$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，而在點 b，只要求當 $\Delta x \to -0$ 時，$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在。

我們首先證明一個輔助性的定理，它在以後有很大的用處。

引理. **如果函數** $f(x)$ **在點** x **有導數，並且對於一切充分小的** $h>0$**，不等式**

$$f(x+h) \leqq f(x), \quad f(x-h) \leqq f(x) \tag{1}$$

永遠成立，則 $f'(x)=0$。

證明. 因爲 $f'(x)$ 存在，所以當 $h\to+0$ 時，我們應當有：

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to f'(x),\qquad \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\to f'(x);$$

對於充分小的 h，按照引理的假設，第一個分式不能是正的，所以它的極限 $f'(x)\leqslant 0$（定理 2 的推論 2，§10）；同樣，對於充分小的 h，第二個分式不能是負的，所以它的極限 $f'(x)\geqslant 0$；導數 $f'(x)$ 既不能是負的又不能是正的，因此它必須等於零。

這個引理告訴我們：如果函數在某一點的函數值和它鄰近的函數值比較起來最大，又在這一點函數的導數存在的話，則這個導數必等於零。顯然，當函數 $f(x)$ 在點 x 的函數值與它鄰近的函數值比較起來是最小的時候，引理仍然是對的，因爲這時只是不等式(1)中的不等號全都需要掉一個頭而已。把函數 $y=f(x)$ 作出圖來（圖 16），這個引理可以得到簡單的幾何解釋：只要曲線 $y=f(x)$ 在某一點的高度和它鄰近的高度比較起來是最高或是最低，並且在這一點又有切線時，則這條切線一定與 OX 軸平行。這裏函數在鄰近 x 的某些點（甚至於全部鄰近 x 的點）所取的值與在點 x 所取的值相等的情形，並沒有除外；所以對於圖 17 所表示的函數，引理中的論斷對區間 (a, b) 的任何一個內點都是成立的。

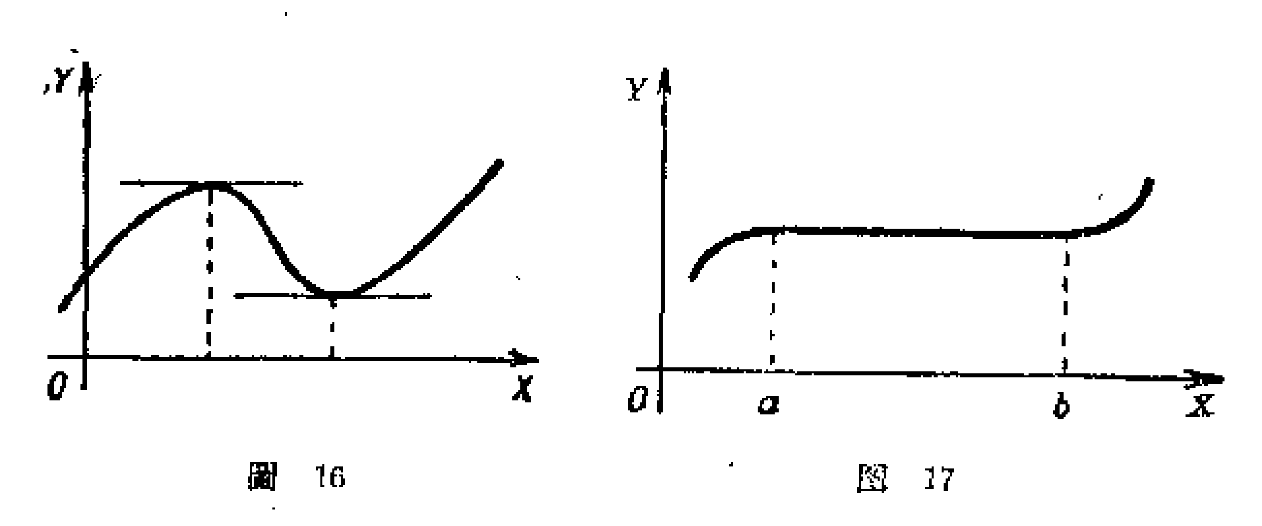


圖 16　　　　圖 17

定理（洛爾）。 假如函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上連續，並且在區間 (a, b) 的任何一個內點都可微，又 $f(a)=f(b)$，則在區間 (a, b) 上一

定可以找到一個內點 c，使得 $f'(c)=0$.

證明．令 $f(a)=f(b)=\gamma$。如果對於區間 (a, b) 上每一個點 x 都有 $f(x)=\gamma$，換句話說，函數 $f(x)$ 在這個區間上是一個常數，則對於區間 (a, b) 內任何一點 x 都有 $f'(x)=0$，定理就證明了。如果不是這樣的情形，那就是說在區間 (a, b) 內有這樣的點使得 $f(x)>\gamma$，或者有使得 $f(x)<\gamma$ 的點（當然這兩種點都有的情形也是可能的）。為了確定起見，我們假定有使得 $f(x)>\gamma$ 的點。

因為函數在區間 (a, b) 上連續，所以根據 § 23 的定理 2，函數一定在這個區間上某一點 c 取到它的最大值；顯然，我們有 $f(c)>\gamma$。因而 c 既不能是 a 也不能是 b，所以它一定是區間 (a, b) 的一個內點；依照點 c 的定義，對於和 c 充分接近的一切 x，$f(x)\leqslant f(c)$ 都成立。因此，應用引理，$f'(c)=0$，定理就得到了證明。

羅爾定理的幾何解釋是：在兩個同樣高度的點間的連續曲線上（圖 18），總可以找到一點，在這一點的切線是水平的；這裏還假定在給定的曲線段上每一點都有切線。

圖 18

定理（拉格朗日的有限改變量定理）。假定函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上連續，並且在這個區間每一內點都可微，則一定可以在這個區間上找到一個內點 c，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{2}$$

因為 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 是連接曲線 $y=f(x)$ 上 $[a, f(a)]$ 與 $[b, f(b)]$ 兩點的弦的斜率（圖 19），所以拉格朗日定理的幾何意義是：在每一點都有切線的曲線上任意一個弦的端點之間，總可找到一點，在這一點的切線和弦平行。顯然，羅爾定理是拉格朗日定理在給定的弦平行於 OX

軸時的一個特殊情形。

在幾何上這是很清楚的，利用簡單的旋轉圖形的方法，一般的結果可以由特殊的結果得到。如果利用羅爾定理，則分析方法的證明也是不複雜的。

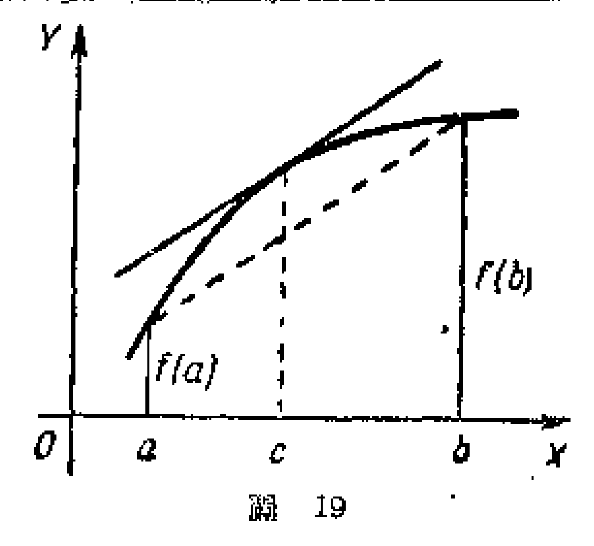


圖 19

證明. 考慮輔助函數

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

在圖19中，這個函數代表曲線的縱坐標和弦的縱坐標之差。顯然，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$；另一方面，跟函數 $f(x)$ 一樣，函數 $\varphi(x)$ 在區間 (a, b) 上連續，在這個區間的每個內點也都可微，並且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

根據羅爾定理，在區間 (a, b) 內部可以找到一點 c，使得

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

而這就證明了拉格朗日定理。

這是微分學中最重要的定理之一，我們在以後將要不止一次地用到它。(2)式也常常更方便地寫成下列形式：

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \tag{3}$$

當然，定理的意思還是那樣：如果區間 (a, b) 上的連續函數 $f(x)$ 在 (a, b) 內部每一點都可微，則在 a 與 b 之間就可以找到這樣一點 c，使得(3)式成立。

最後，我們來把這個結果寫成其他的形式。用 x 代替 a，$x+\Delta x$ 代替 b，於是 $b-a=\Delta x$；我們就得到

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\Delta x \qquad (x<c<x+\Delta x).$$

如果把量 $f(x)$ 記作 y，則像我們通常所作的那樣，這個式子的左端可以簡單地記作 Δy. 其次，關於點 c，我們只知道它是在 x 與 $x+\Delta x$ 之間，因此把它記作 $x+\theta\Delta x$ 是很合適的，這裏 θ 表示在 0 與 1 之間（到底是多少我們不知道）的一個數 $(0<\theta<1)$。於是我們的等式就成爲

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \tag{4}$$

比較一下這個等式和在第七章中我們不止一次地用到過的

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

是很有趣的；後面的這個等式表示在準確到一個高級無窮小的程度下，函數 $y=f(x)$ 的改變量 Δy 等於乘積 $f'(x)\Delta x$；而（4）式（即有限改變量定理）說明在這個式子中的 $o(\Delta x)$ 可以去掉，而在主要項中的 $f'(x)$ 必須換成在 x 與 $x+\Delta x$ 之間的（到底在那裏我們不知道）某一點 $x+\theta\Delta x$ 的導數。這兩個等式都有許多應用。

拉格朗日定理的一個重要推廣是下面的

定理（哥西）。如果函數 $f(x)$ 與 $\varphi(x)$ 在區間 (a, b) 上連續，在這個區間內部可微，並且 $\varphi'(x)\neq 0$ $(a<x<b)$，就一定有這樣一點 c $(a<c<b)$ 存在，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{5}$$

（換句話說，兩個函數的改變量之比，等於它們在給定的區間上同一個內點的導數之比）。

證明. 我們可以像證明拉格朗日定理一樣來證明哥西定理。只要把輔助函數取成

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)]$$

[這裏 $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$. 因爲如果等於零，根據羅爾定理就有某一個 c 存在 $(a<c<b)$，使得 $\varphi'(c)=0$，而這就與假設相矛盾了]。以後的全

部論證跟拉格朗日定理證明的情形是一樣的，最後我們得到

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0 \qquad (a<c<b),$$

從這個等式就得出(5)式。

顯然，如果取 $\varphi(x)=x$，哥西定理就變成了拉格朗日定理，所以哥西定理實際上是拉格朗日定理的推廣。

我們曾說過，在這一節中我們證明的定理，在分析中有許多應用。現在我們就來考慮一個簡單，但是却很重要的這種應用的例子。

我們都知道，常量的導數等於零。但反過來是否對呢，就是說能不能作出這樣的結論：如果函數 $f(x)$ 在給定的區間上的導數永遠是零，則這個函數在這個區間上就是一個常量？要回答這個問題，我們在給定的區間上任選兩點 x_1 與 x_2；由拉格朗日定理，我們可以肯定。

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),$$

其中 c 是某一個在 x_1 與 x_2 中間的點；但是我們假定了在給定的區間上每一點 x 都有 $f'(x)=0$。特別當然就有 $f'(c)=0$，因而 $f(x_2)=f(x_1)$。這說明，函數 $f(x)$ 在給定的區間上任何兩點的值都一樣，也就是說函數在給定的區間上是一個常量。這樣，我們就看到有限改變量定理很容易地幫助我們證明了下面的定理，這個定理我們在今後將要不止一次地用到。

定理． 如果在區間 (a, b) 上的每一點都有 $f'(x)=0$，則函數 $f(x)$ 在這個區間上是一個常數。

在下面的兩節中，我們將考慮中值定理的另外一些重要應用。

§ 37. 無窮小量之比與無窮大量之比的極限的計算法

在我們考慮極限的一般理論時(第2章)，我們就曾經指出過：兩個無窮小量之比(兩個無窮大量之比也一樣)在一個給定的過程中，隨着這些無窮小量(或無窮大量)的不同類型，可以有很不一樣的變化狀

態，就因爲這樣，我們不能作出關於這種比的性質的一般性的結論。但是這些比却有着非常巨大的實際意義：特別是如我們所知道的，函數的導數就是用兩個無窮小量之比的極限來確定的，而導數概念是整個微分學的基礎概念。因此這就很清楚了，提出任何或大或小的，計算這種比的極限(當然在它們存在的情况下)的一般方法，對我們來說都是很有價値的。一個非常有效，簡單而且强有力的方法，可以根據上節中建立的中値定理推演出來。現在我們就來進入這個討論。

假定點 a 屬於區間 Δ(換句話說，a 是 Δ 的一個内點或端點)，函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 在 Δ 上連續；假定 $f_1(a)=f_2(a)=0$，並且在屬於區間 Δ 的每一個點 $x\neq a$，兩個函數都可微而且 $f_2'(x)\neq 0$。於是在區間 Δ 上，$f_2(x)\neq 0\,(x\neq a)$，因爲否則，根據羅爾定理，$f_2'(x)$ 在區間 Δ 的某一點(不是 a)就要等於零，當然這是不行的。因此我們可以討論比 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$，並且提出當 $x\to a$ 時它的極限問題。因爲 $f_1(a)=f_2(a)=0$，所以

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1(x)-f_1(a)}{f_2(x)-f_2(a)},$$

根據上節中的哥西定理，顯然在這裏，它所需要的條件全部滿足，所以有

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1'(c)}{f_2'(c)},\tag{1}$$

其中 c 是在 a 與 x 之間的某一點(中間値)。現在假定當 $x\to a$ 時，比 $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ 趨向某一個極限 l。因爲 c 在 a 與 x 之間，當 $x\to a$ 時，也就有 $c\to a$，從而

$$\frac{f_1'(c)}{f_2'(c)}\to l,\quad (x\to a);$$

再根據等式(1)就得到

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\to l\quad (x\to a).$$

以上證明的定理叫做**洛必大法則**：

假定 $f_1(a)=f_2(a)=0$，又函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 在某個包含點 a 的區間上連續。如果對於區間 Δ 上每個點 $x\neq a$，$f_1'(x)$ 與 $f_2'(x)$ 都存在，並且 $f_2'(x)\neq 0$ $(x\neq a)$，又 $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}\to l$ $(x\to a)$，則必有 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\to l$ $(x\to a)$。

這個法則的重要性是在於：在許多情形下，導數之比的極限比已知函數之比的極限容易求出來；特別是可能有這種情形，當 $x\to a$ 時，這個或那個導數不是無窮小量；於是在這種情形下，我們所處理的就不再是兩個無窮小量之比的極限，而是一個通常用非常簡單的辦法就可以求出的極限。

例 1. 當 $b\neq 0$, $x\to 0$ 時，$\lim\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b}$.

例 2. 當 $x\to 0$ 時，$\lim\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$

$$=\lim\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

讀者可以在 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第二章，§10 中找到許多其他的有益的習題。

如果當 $x\to a$ 時，導數 $f_1'(x)$ 與 $f_2'(x)$ 還都是無窮小量，又在點 a 的某個鄰域內它們也是可微的（而且當 $x\neq a$ 時，$f''(x)$ 總不等於零），那就不妨再運用一次洛必大法則：如果當 $x\to a$ 時，$\frac{f_1''(x)}{f_2''(x)}\to l$，則按照這個法則，也有 $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}\to l$，從而當 $x\to a$ 時，$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\to l$。一般說來，如果在點 a 的某個鄰域內函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 的 n 級導數存在，又當 $x\neq a$ 時，$f_2^{(n)}(x)\neq 0$，並且 $f_1(a)=f_2(a)=f_1'(a)=f_2'(a)=\cdots=f_1^{(n-1)}(a)=$ $=f_2^{(n-1)}(a)=0$，則我們重複運用洛必大法則，顯然可以作出以下結論：如果

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1^{(n)}(x)}{f_2^{(n)}(x)}=l,$$

則當 $x\to a$ 時，比 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ 的極限存在並且等於 l。❶

例 3. $f_1(x)=x-\sin x$，$f_2(x)=x^3$；我們可以求出

$$f_1'(x)=1-\cos x,\quad f_1''(x)=\sin x,\quad f_1'''(x)=\cos x,$$

$$f_2'(x)=3x^2,\quad f_2''(x)=6x,\quad f_2'''(x)=6,$$

所以

$$f_1(0)=f_1'(0)=f_1''(0)=0,\quad f_1'''(0)=1,$$

$$f_2(0)=f_2'(0)=f_2''(0)=0,\quad f_2'''(0)=6,$$

$$\frac{f_1'''(x)}{f_2'''(x)}\to\frac{1}{6}\quad(x\to 0),$$

因此

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{x-\sin x}{x^3}\to\frac{1}{6}\quad(x\to 0).$$

洛必大法則對於 $x\to\infty$ 的過程也是有效的。如果，比如說，當 $x\to+\infty$ 時，函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 都是無窮小量，而且對於充分大的 x，它們都可微，並且 $f_2'(x)\neq 0$，則從

$$\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}\to l\quad(x\to+\infty)\tag{2}$$

就可以推出

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\to l\quad(x\to+\infty).$$

事實上，設 $x=\dfrac{1}{y}$，我們就有：

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1\left(\dfrac{1}{y}\right)}{f_2\left(\dfrac{1}{y}\right)}=\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)},$$

這裏當 $y\to+0$ 時，

$$\varphi_1(y)\to 0,\quad \varphi_2(y)\to 0.$$

---

❶ 重複運用洛必大法則時，要求 $f_2^{(k)}(x)\neq 0$ $(1\leqslant k\leqslant n,\ x\neq a)$ 成立。當 $k=n$ 時，這是定理中的一個假設。至於 $k<n$ 時，則利用歸納法，對函數 $f_2^{(k)}(x)$，在區間 (a,x) 上運用羅爾定理，就很容易證實 $f_2^{(k)}(x)\neq 0$ $(x\neq a)$。

因爲

$$\frac{\varphi_1'(y)}{\varphi_2'(y)}=\frac{f_1'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{f_2'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}=\frac{f_1'\left(\frac{1}{y}\right)}{f_2'\left(\frac{1}{y}\right)},$$

所以由(2)式得出

$$\frac{\varphi_1'(y)}{\varphi_2'(y)}\to l \quad (y\to+0);$$

因此，根據洛必大法則，有

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}\to l \quad (y\to+0),$$

這也就是

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\to l \quad (x\to+\infty).$$

例 4. 當 $x\to+\infty$,

$$\lim x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)=\lim\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}=\lim\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim\frac{x^2}{x^2+1}=1.$$

現在我們轉來討論兩個無窮大量之比的情形。我們就會看到，對於這種情形洛必大法則仍然有效，雖然它的證明比較要複雜一些。假定我們有:

$$|f_1(x)|\to+\infty,\quad |f_2(x)|\to+\infty \quad (x\to a),$$

又，跟前面一樣，假定在點 a 的某個鄰域內的任何一點 $x\neq a$，兩個函數都可微，並且 $f_2'(x)\neq 0$。在這個鄰域內取兩個在點 a 的同一邊的點 x 與 α，比如說 $a<x<\alpha$。哥西定理給出

$$\frac{f_1(x)-f_1(\alpha)}{f_2(x)-f_2(\alpha)}=\frac{f_1'(c)}{f_2'(c)}$$

其中$x<c<\alpha$。但是另一方面，

$$\frac{f_1(x)-f_1(\alpha)}{f_2(x)-f_2(\alpha)}=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{1-\frac{f_1(\alpha)}{f_1(x)}}{1-\frac{f_2(\alpha)}{f_2(x)}};$$

把這兩個等式擱在一起，就得到

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1'(c)}{f_2'(c)}\frac{1-\frac{f_2(\alpha)}{f_2(x)}}{1-\frac{f_1(\alpha)}{f_1(x)}}. \tag{3}$$

現在假設

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=l.$$

假定$\varepsilon>0$是一個任意小的正數；我們可以取接近於a的α，使得當$a<z<\alpha$時，有：

$$\left|\frac{f_1'(z)}{f_2'(z)}-l\right|<\varepsilon,$$

或卽

$$l-\varepsilon<\frac{f_1'(z)}{f_2'(z)}<l+\varepsilon;$$

因爲c在a與α之間，所以也就有：

$$l-\varepsilon<\frac{f_1'(c)}{f_2'(c)}<l+\varepsilon \tag{4}$$

（當x變動時，c跟着也要變動，不過因爲c總是在a與α之間，所以不等式（4）永遠成立）。對於固定的α，令x趨向於a；根據我們的假設，這時$|f_1(x)|\to+\infty$，$|f_2(x)|\to+\infty$，因此，（3）式右端的第二個因子趨向於1；因而這個因子可以寫成$1+\delta$，其中$\delta\to0(x\to a)$。用$1+\delta$遍乘（4）式，再代入（3）式，我們就得到

$$(1+\delta)(l-\varepsilon)<\frac{f_1(x)}{f_2(x)}<(1+\delta)(l+\varepsilon);$$

因爲 ε 可以任意小，並且當 $x\to a$ 時，$\delta\to 0$，顯然由上式就推出

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\to l \quad (x\to a),$$

這就是我們所要證明的。

例 5. 當 $x\to 0$ 時，$\ln x\to -\infty$，因此不能立刻看出，這時乘積 $x\ln x$ 的動態怎麼樣。要研究這一點，我們注意

$$-x\ln x=\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}$$

可以表作兩個無窮大量之比；由於分子與分母的導數分別是 $-\frac{1}{x}$ 與 $-\frac{1}{x^2}$，所以比值就是 x，因而趨向於0；因此根據洛必大法則，我們就得到：

$$x\ln x\to 0 \quad (x\to 0).$$

跟前面一樣，我們不難證明，當 x 不趨向有限極限，而是趨向無限增大的情形，洛必大法則對於兩個無窮大量之比也還是對的。

例 6. 當 $x\to +\infty$ 時，

$$\lim\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\frac{2}{\sqrt{x}}=0,$$

並且一般說來 $(\alpha>0)$，當 $x\to\infty$ 時，

$$\lim\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

例 7. 假定 $a>1$，$\alpha>0$。當 $x\to+\infty$ 時，函數 x^α 與 a^x 都無限制地增大。假設令 n 代表小於 α 的最大整數，即 $0\leqslant n<\alpha\leqslant n+1$。不難看出，函數 x^α 從一級到 n 級的導數，當 $x\to\infty$ 時，都無限制地增大，而 $n+1$ 級導數等於 $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}$ 則是有界的，因爲函數 a^x 的 $n+1$ 級導數等於 $a^x(\ln a)^{n+1}$，當 $x\to+\infty$ 時，無限地增大，所以運

用洛必大法則 $n+1$ 次就得到

$$\frac{x^n}{a^x}\to 0 \quad (x\to +\infty)$$

這裏 $\alpha>0$ 與 $a>1$ 都是任意的。

§ 38. 戴勞公式

我們從已知的，在 § 31 中建立的下列事實出發：如果函數 $f(x)$ 在點 a 有導數，則當 $h\to 0$ 時，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o(h). \tag{1}$$

當 $|h|$ 很小時，根據這個公式，我們就可以把 $f(a+h)$（一般說來，它依賴於 h 的情况很複雜）近似地表成 h 的簡單的線性函數：

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h,$$

並且這個近似等式的誤差就是 $o(h)$；換句話說，當 h 很小時，不僅這個誤差本身很小，而且它與 $|h|$ 比起來也很小。我們已經看到過，這個事實首先是在計算中有很大的價値，因爲它使得我們很容易找到 $f(a+h)$ 的很好的近似値（參考 § 31）。現在我們馬上就要看到，也就是這個事實，還是今後理論的進一步發展的出發點。

關於公式(1)中的量 $o(h)$，我們所知道的，只是當 $h\to o$ 時，它是一個比 h 更高級的無窮小量；此外，我們沒有關於它的任何更精確的知識。用公式(1)來近似地計算 $f(a+h)$ 究竟是否合適的問題，完全取決於我們滿意於一個什麼樣的精確程度。如果我們要求的精確程度，容許我們略去 $o(h)$（即，一個比 h 更高級的無窮小量）不計，那末，公式(1)就已經解決了我們的問題。否則的話，它就還不够精確。有時，我們會遇到這種情形（事實上常常會遇到這樣的情形），例如，我們必須計算到與 h 比較是二級的無窮小量（也就是必須計算到 h^2），但是高於二級的量（也就是 $o(h^2)$）倒可以略去不計。於是，類似於公式(1)，我們

就必需來找到一個下列形式的$f(a+h)$的更精確的表達式：

$$f(a+h)=\alpha_0+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+o(h^2),$$

其中α_0, α_1, α_2,都是（與h無關的）常數；換句話說，就是要用一個二次三項式

$$f(a+h)\approx\alpha_0+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2,$$

來近似地表達$f(a+h)$，並且其誤差是一個$o(h^2)$形式的量（也就是與h比起來一個高於二級的無窮小量）。當然我們還不知道這樣的多項式究竟是否存在，而且還沒有找出它的係數α_0, α_1, α_2來；因此我們上面所講的只能看成是提出了問題而已。

然而，在解決這個問題之前，我們很自然地要來先給出它的最一般的形式。由於要想求$f(a+h)$的近似值的這個問題的眞正內容，決定了我們還必需同時判定近似值的精確程度。作爲最一般的情形，我們假定h^n（n是一個自然數）都還是需要計算的，只是比它更高級的無窮小量（即$o(h^n)$）可以略去不計。試問：1）是否有一個n次多項式

$$P_n(h)=\alpha_0+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+\cdots+\alpha_n h^n$$

存在（其係數與h無關），當$h\to 0$時，

$$f(a+h)-P_n(h)=o(h^n). \tag{2}$$

2）如果它存在的話，應該怎麼樣來求這些係數？如果這兩個問題都能够得到肯定的解決，則多項式$P_n(h)$就是一個求$f(a+h)$的近似值，並且能够精確到我們所需要的程度的工具。一般說來，對於實際計算（對理論研究也一樣），我們還不知道有什麼比多項式還來得更簡單方便的別的東西，可以作爲這種工具。

當然，我們可以預料到，上述問題的答案，一定與函數$f(x)$在點a的鄰近的性質是緊密相關的。要知道在以前討論$n=1$的情形時，我們就已經作了函數$f(x)$在點a可微的假定。如果我們想要用n次多項式來近似地表示$f(a+h)$，並且要準確到$o(h^n)$，則我們必須假定函數$f(x)$在點a有直到n級爲止的導數（換句話說，假定$f^{(n)}(a)$存在）。

不過，這個假定將是唯一的假定。

以下我們就來證明，如果$f^{(n)}(a)$存在，則當$h\to 0$時，就有

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+o(h^n);\quad (T)$$

換句話說，多項式

$$P_n(h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n \qquad (3)$$

當$h\to 0$時，滿足等式(2)，這就解決了我們所提出的問題。令

$$f(a+h)-P_n(h)=\varphi(h),$$

於是我們應該證明

$$\frac{\varphi(h)}{h^n}\to 0 \quad (h\to 0).$$

但是直接計算給出❶：

$$\varphi(h)=f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\frac{h^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

$$\varphi'(h)=f'(a+h)-f'(a)-hf''(a)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a),$$

$$\varphi''(h)=f''(a+h)-f''(a)-hf'''(a)-\cdots-\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(a),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(n-2)}(h)=f^{(n-2)}(a+h)-f^{(n-2)}(a)-hf^{(n-1)}(a)-\frac{h^2}{2!}f^{(n)}(a),$$

$$\varphi^{(n-1)}(h)=f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)-hf^{(n)}(a),$$

因而

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=\cdots=\varphi^{(n-2)}(0)=0.$$

另一方面，當$h\to 0$時，函數h^n及其從一級到$n-2$級的導數都趨向於零；它的$n-1$級導數等於$n!h$ 所以應用洛必大法則就得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{h^n}=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi^{(n-1)}(h)}{n!h}, \qquad (4)$$

❶ 顯然，由$f^{(n)}(a)$存在的假定可以推出對於充分小的$|h|$，$f^{(n-1)}(a+h)$存在，從而$f^{(n-2)}(a+h)$，…，$f'(a+h)$都存在。

這裏只需要等式右端的極限存在。但是

$$\frac{\varphi^{(n-1)}(h)}{n!h}=\frac{1}{n!}\left\{\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)}{h}-f^{(n)}(a)\right\}, \tag{5}$$

又因爲按照定義

$$f^{(n)}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)}{h},$$

所以(5)式右端的極限是零，因而左端也就在 $h\to 0$ 時趨向於零；根據(4)式就得到

$$\frac{\varphi(h)}{h^n}\to 0\quad (h\to 0)$$

這就證明了我們的論斷。

以上在只假定了 $f^{(n)}(a)$ 存在的情形下，所得到的這個公式(T)，通常稱爲**戴勞公式**。它是數學分析中的重要公式之一，有着大量的理論的和實際的應用。我們常常把它寫成從(T)稍加改變的下列形式：用 x 來代替 $a+h$；於是 $h=x-a$，公式(T)就變成

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o[(x-a)^n].$$

特別當 $a=0$ 時，我們就得到所謂的**馬克勞林公式**：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

對於絕對值很小的 x，這個公式把函數 $f(x)$ 用 x 的多項式近似地表達了出來。

我們上面已經證明了戴勞多項式(3)解決了用 n 次多項式來近似表達 $f(a+h)$ 的問題，換句話說(3)式滿足條件(2)。現在我們來證明這個問題的解還是唯一的，換句話說，再找不出另外一個多項式 $Q_n(h)$，它的次數不大於 n，並且當 $h\to 0$ 時，也滿足

$$f(a+h)-Q_n(h)=o(h^n). \tag{6}$$

事實上，如果有這樣的另外一個多項式 $Q_n(h)$ 存在，那麼，由(2)式和(6)式，當 $h\to 0$ 時，我們就得到

$$P_n(h)-Q_n(h)=o(h^n);$$

但是 $P_n(h)-Q_n(h)=\beta_0+\beta_1 h+\cdots+\beta_n h^n$ 是一個不超過 n 次的多項式；假定 β_k 是 $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_n$ 中第一個不等於零的數；於是我們就得到(因爲 $k\leqslant n$)：

$$P_n(h)-Q_n(h)=\beta_k h^k+\beta_{k+1}h^{k+1}+\cdots+\beta_n h^n=o(h^n)=o(h^k).$$

但是這個等式說明當 $h\to 0$ 時，

$$\frac{\beta_k h^k+\beta_{k+1}h^{k+1}+\cdots+\beta_n h^n}{h^k}=\beta_k+\beta_{k+1}h+\cdots+\beta_n h^{n-k}\to 0,$$

而這是不可能的，因爲當 $h\to 0$ 時，左端的極限顯然等於 $\beta_k\neq 0$. 這就證明了我們問題的解還是唯一的。

§ 39. 戴勞公式的餘項

戴勞公式給出了函數 $f(a+h)$ 與多項式 $P_n(h)$ 之差(也就是用這個多項式來近似表達 $f(a+h)$ 時所產生的誤差)的表達式 $o(h^n)$。我們知道，這個表達式能夠說明當 $h\to 0$ 時，差 $f(a+h)-P_n(h)$ 的變化狀態，但是它一點也沒有談到這個差的數量性質，沒有談到對於一個具體給定的值 h，這個差到底是多麼小。然而我們很清楚，在用多項式 $P_n(h)$ 來代替 $f(a+h)$ 的任何具體計算中，我們很想知道的，正是對於那些我們在實際上必需考慮的定值 a 與 h，這種代替所產生的誤差究竟有多大。因此，我們需要找出一種估計這個誤差的方法，而不能滿足於像戴勞公式所給我們的這種關於誤差變化狀態的說明。換一種說法，戴勞公式僅僅告訴了我們所討論的誤差的極限性質，而我們希望知道的却是對於具體給定的值 a 與 h，這個誤差究竟應該怎樣來進行估計。

爲了這個目的，我們把公式(T)寫成

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n(h) \qquad (1)$$

其中

$$R_n(h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+o(h^n).$$

我們把 $R_n(h)$ 稱爲戴勞公式的餘項。

假定 q 是任意一個正數（不一定是整數）。又爲了簡便起見，把 $a+h$ 寫成 b，然後我們來考慮函數

$$\varphi(x)=f(x)+(b-x)f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{R_n(h)}{(b-a)^q}(b-x)^q. \qquad (2)$$

到現在爲止，我們僅僅假定了 $f^{(n)}(x)$ 在點 $x=a$ 存在；現在我們必須把這個條件加强，假定 $f^{(n)}(x)$ 對於區間(a, b)的每個內點都存在。於是很明顯，函數 $\varphi(x)$ 在所有這些內點都是可微的。微分 $\varphi(x)$，我們就得到$(a<x<b)$：

$$\varphi'(x)=f'(x)+(b-x)f''(x)-f'(x)+$$
$$+\frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)-(b-x)f''(x)+\cdots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)-$$
$$-\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x)-\frac{R_n(h)}{(b-a)^q}q(b-x)^{q-1}=$$
$$=\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)-\frac{R_n(h)}{(b-a)^q}q(b-x)^{q-1}.$$

其次顯然有 $\varphi(b)=f(b)$，又根據 (1) 式不難看到，也有 $\varphi(a)=$ $=f(a+h)=f(b)$。因而，對於函數 $\varphi(x)$ 我們可以應用羅爾定理（在區間 (a, b) 上）：在 a 與 $b=a+h$ 之間的某一個點 c，有$\varphi'(c)=0$。顯

然，我們可以令 $c=a+\theta h$，其中 $0<\theta<1$；於是

$$b-c=a+h-c=(1-\theta)h,$$

因而我們就得出

$$\varphi'(c)=\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c)-\frac{R_n(h)}{(b-a)^q}q(b-c)^{q-1}=$$

$$=\frac{(1-\theta)^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h)-qR_n(h)\frac{(1-\theta)^{q-1}}{h}=0,$$

由此可見

$$R_n(h)=\frac{h^n(1-\theta)^{n-q}}{q(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h).$$

戴勞公式的餘項的這個表達式具有很大的普遍性，因爲它含有參變量 q，而我們可以給 q 以任何正值。當然，究竟什麼樣的 q 值才能使表達式 $R_n(h)$ 成爲最便於利用的形式的問題，是直接與函數 $f(x)$ 的類型相關的。不過，在絕大多數的情形，令 $q=n$ 最爲合宜，於是，$R_n(h)$ 的表達式是

$$R_n(h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h). \tag{3}$$

而公式(1)就變成了

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h) \tag{4}$$

這樣形式的公式(1)是一個典型的中值定理；當 $n=1$ 時，它就退化成拉格朗日定理

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h),$$

因而，上面的一般情形是拉格朗日定理的推廣。(3)中這種形式的戴勞公式的餘項也是拉格朗日引進的，通常稱爲**拉格朗日型**的餘項。

餘項的另外一個常用的形式是在一般公式中令 $q=1$ 得到的：

$$R_n(h)=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

(所謂哥西型餘項)。

在有了這個或那個戴勞公式餘項的表達式後，我們已經有可能來具體估計這個公式所產生的誤差了。爲了說明這一點，我們現在來把戴勞公式應用到一些簡單的初等函數上去。

例 1. $f(x)=e^x$, $a=0$；爲方便計，把 h 換寫成 x；由於 $f^{(k)}(x)=e^x$, $f^{(k)}(0)=1$, $k=1, 2, \cdots$, 公式(4)給出：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}\ (0<\theta<1).$$

例如當 $0\leqslant x\leqslant 1$ 時，這個公式的餘項不超過

$$\frac{x^n e}{n!}\leqslant\frac{e}{n!}$$

並且當 n 增大時，它減小得很快，甚至於對於不很小的 x 都如此；特別當 $x=1$ 時，我們得到公式

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}e^{\theta}.$$

由於這個公式的餘項不超過 $\frac{e}{n!}$，而當 n 增大時，$\frac{e}{n!}$ 減小得很快，所以這個公式使得我們能夠很容易地求出 e 的近似值，並且可以達到很高的精確程度。

例 2. $f(x)=\sin x$, $a=0$；不難看出，$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $\cdots$ 作成一個有週期性的序列 $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \cdots$。因此，對於 $a=0$ $h=x$ 以及奇數 $n=2k+1$，公式(4)給出：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x,$$

因爲 $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$。對函數 $f(x)=\cos x$ 作類似計算也有：

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x.$$

在這兩個展開式中，$|\cos\theta x|\leqslant 1$，所以餘項的絕對值不超過 $\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$

或$\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$，特別對於很小的$|x|$，它們都隨着k的增大而減小得很快。

例 3. $f(x)=\ln x$, $a=1$；在這個情形，有

$$f'(x)=x^{-1},\ f''(x)=-x^{-2},\ \cdots,\ f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n},$$

所以

$$f(1)=0,\ f'(1)=1,\ f''(1)=-1,\ \cdots,\ f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

因此當$a=1$, $h=x$時，公式(4)給出

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}.$$

當$0<x\leqslant 1$時，餘項的絕對值小於$\frac{1}{n}$，所以當n增大時，它也趨向於零，不過沒有前兩個例子中那樣快。當$-1<x<0$時，因子$(1+\theta x)^{-n}$無窮增大，而且它增大的級我們無法斷定，因爲θ對我們來說，還不知道。在這個情形，採用哥西型餘項就更合適一些：

$$R_n(x)=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(1+\theta x)=(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1};$$

因爲當$-1<x<0$時，我們有$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$；所以餘項的絕對值總是小於$\frac{|x|^n}{1-|x|}$，因而當$n\to\infty$時，它還是趨向於零。

在以上所舉的一切例子中，我們都是按照本節一開始所提出的問題，力圖去估計當已知a, h與n時$R_n(h)$的值，換句話說，力圖去估計用n次多項式來代替$f(a+h)$時所產生的誤差。然而，在實際上要我們解決的問題常常與此正好相反；比如說，可容許的誤差的限度Δ常常預先已經給定了；於是我們需要解決的問題，或者是h可以在一個什麼樣的範圍內變化，才能對於已知的n，保證誤差$|R_n(h)|$不超過Δ，或者，與此相反，給定了h的變化範圍，要知道數n必需取到多大，才能達到剛才同樣的目的。我們要證明，這些問題，只要利用餘項的最普遍的形式(3)，就大體上都可以獲得解決。

假定我們對於函數 $f(x)$ 在某個區間 $(a-l\leqslant x\leqslant a+l)$ 上的值感到興趣。如果我們用 $M^{(n)}$ 來表示函數 $|f^{(n)}(x)|$ 在這個區間上的最大值，則當 $|h|\leqslant l$ 時，根據公式(3)我們有 $|R_n(h)|\leqslant\frac{M^{(n)}|h|^n}{n!}$；因此，要想保證誤差 $|R_n(h)|<\Delta$，就只要

$$\frac{M^{(n)}|h|^n}{n!}<\Delta,$$

或者

$$|h|<\left(\frac{\Delta n!}{M^{(n)}}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{*}$$

因此，如果 $|h|$ 小於 l 與 $\left(\frac{\Delta n!}{M^{(n)}}\right)^{\frac{1}{n}}$ 中較小的一個，不等式 $|R_n(h)|<\Delta$ 就可以保證成立了。反過來，如果誤差限度 Δ 與確定 h 的變化範圍的數 l，在某種實際計算中都已經事先完全給定（這種情形是常有的），則我們應該把 n 選得這樣大，使得

$$\left\{\frac{\Delta n!}{M^{(n)}}\right\}^{\frac{1}{n}}\geqslant l.$$

於是當 $|h|<l$ 時，不等式 (*) 就成立，從而有 $|R_n(h)|<\Delta$。

例如，如果 $f(x)=\sin x$[或 $f(x)=\cos x$ 參考上面例 2]，對於計算者的目的而言，最自然最簡單不過的，是令 $a=0, l=\frac{\pi}{4}$（因為只要知道 $\sin x$ 與 $\cos x$ 在區間 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上的值，不需要任何計算我們就可以求出這些函數對於任何 x 的值）。因為對於 $f(x)=\sin x$，有 $|f^{(2k+1)}(\theta x)|=$ $=|\cos\theta x|\leqslant 1$，所以我們可以令 $M^{(2k+1)}=1$。假定所要求的精確度 $\Delta=$ $=0.0001$。於是我們應當有

$$0.0001\cdot(2k+1)!\geqslant\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1},$$

不難算出，當 $k\geqslant 3$ 時上式就已經成立。因此，近似公式

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

給出函數 $\sin x$ 在區間 $|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$ 上的值的誤差不超過 0.0001。對於 $f(x)=\cos x$，可以類似地進行計算。

第十章　微分法在函數研究上的應用

§ 40. 函數的遞增性與遞減性

導數的實際意義，首先在於它的絕對值 $|y'|=|f'(x)|$ 決定了函數 $y=f(x)$ 關於自變量 x 的變化速度。正是從這個實際意義出發，我們引進了導數的一般定義的。因此，如果知道了函數的導數，在一般情形下，我們就可以直接估計這個函數在某些部分變化的速度。懂得這一點是十分有用的，讓我們來看下面的例子。函數 $y=x^2$ 與 $z=\ln x$ 當 $x>0$ 時都隨 x 增大而增大。要想估計它們增大的快慢，我們來考慮它們的導數

$$y'=2x,\quad z'=\frac{1}{x}.$$

顯而易見，y' 隨着 x 的增大而逐漸增大，但是 z' 却隨着 x 的增大而逐漸減小。這就說明，當 x 增大時函數 $y=x^2$ 增大的速度比較快，而 $z=\ln x$ 增大的速度則比較慢。因此，雖然兩個函數都隨 x 的增大而逐漸增大，但是在增大的規律上，它們却有着上述深刻的差別。我們揭露這個差別，僅僅看了一下它們的導數 y' 與 z' 的表達式。當然，如果我們考察這兩個函數的圖形（圖 20），也不難發現這個差別，但是導數所給我們的知識的意義在於，它使我們不必作出函數的圖形就能够直接估計它的變化速度。

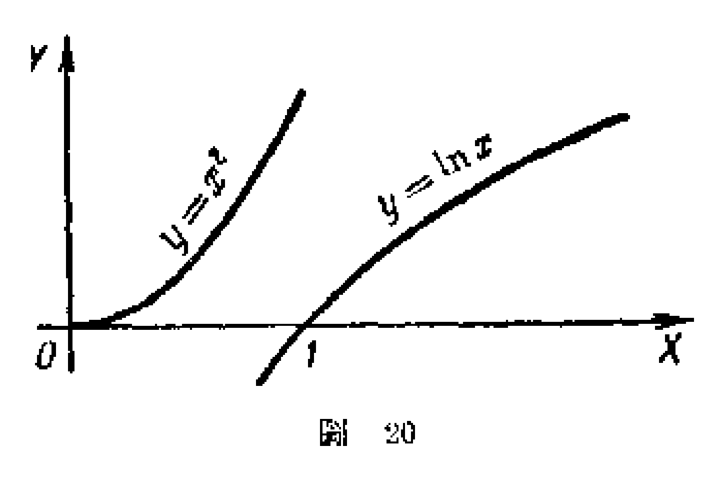


圖 20

另一方面，我們已經知道，導數的符號可以決定函數的變化方向：正的導數表明函數的遞增性，而負的導數則表明函數的遞減性（都是對自變量逐漸增大的情况來說的）。現在我們應當把這個問題弄

得更精確一些。

我們說確定在區間 (a, b) 上的函數 $y=f(x)$ 在該區間上是不減的，是指對於 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 我們總有 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$（也就是說，在該區間上當 x 增大時 y 永遠不減小）；如果對於 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 我們總有不等式 $f(x_2)>f(x_1)$，我們就說函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上是遞增的。同樣，只要把關於 $f(x_1)$ 與 $f(x_2)$ 的不等式的符號變一下，我們就可以規定什麼叫做函數在給定區間上不增或者遞減。顯然，每一個遞增函數同時又是一個不減函數，但反過來就不對；同樣，每一個遞減函數同時又是一個不增函數，反過來也不對。

下面的定理說明了導數的符號與函數的變化方向之間的關係：

定理 1. 假定函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 的每一點上都可微，則 $f(x)$ 在該區間上不減的必要充分條件是

$$f'(x)\geqslant 0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

證明. 1）如果函數 $f(x)$ 在 (a, b) 上是不減的，則當 $a\leqslant x<x+h\leqslant b$ 時，有

$$f(x+h)-f(x)\geqslant 0,$$

因而，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0;$$

於是根據 §10 定理 2 的推論 2 得出：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0.$$

2）如果 $f'(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，則當 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 時，根據有限改變量定理，得到：

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\geqslant 0$$

（其中 c 是 x_1 與 x_2 之間的某一點，因而也必然在 a 與 b 之間）。這就表明，函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上是不減的。因此，定理 1 就證明了。

顯然，如果我們把定理1中的"不減"改成"不增"，同時把 $f'(x)\geqslant 0$ 改成 $f'(x)\leqslant 0$，則定理1仍舊成立。要想證明這一點，只要把定理1應用到函數 $-f(x)$ 就行了。

定理 2. 如果 $f'(x)>0(a\leqslant x\leqslant b)$，則函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上是遞增的。

證明. 根據有限改變量定理，當 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 時，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0,$$

因為 $x_1<c<x_2$，所以 $a<c<b$，因而 $f'(c)>0$。

因此 $f'(x)>0(a\leqslant x\leqslant b)$ 是函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上遞增的一個充分條件，但它不是必要條件；也就是說定理 2 的逆定理不成立。這是因為從 $f(x_2)>f(x_1)(a\leqslant x_1<x_2\leqslant b)$ 只能推出（根據定理1）$f'(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$，而不能推出 $f'(x)>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$。這一事實可以用下面的例子來說明：顯然，函數 $f(x)=x^3$ 在整個數軸 $(-\infty<x<+\infty)$ 上都是遞增的，但當 $x=0$ 時却有 $f'(x)=3x^2=0$。圖 21 清楚地說明這種現象在直觀上的意義：曲線 $y=x^3$ 從左到右逐漸上升，同時在 $x=0$ 有一條水平切線。

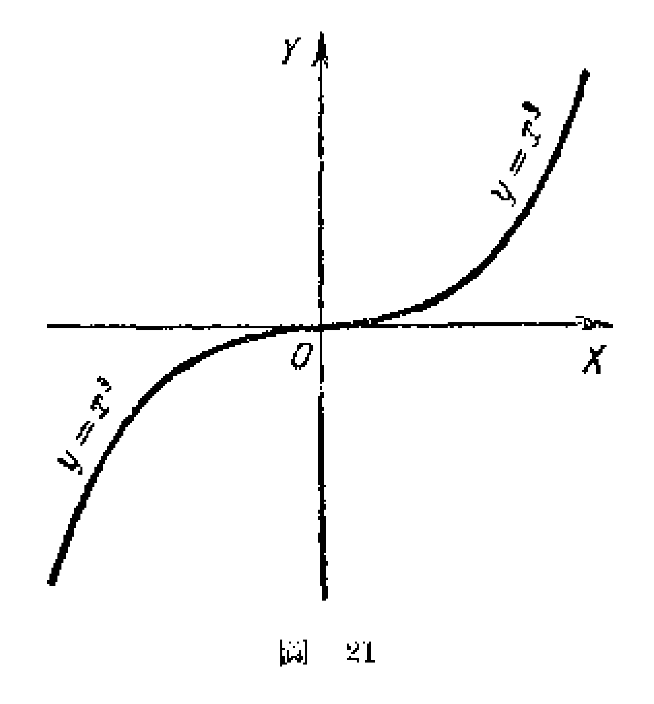


圖 21

不言而喻，如果當 $a\leqslant x\leqslant b$ 時永遠有 $f'(x)<0$，則函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上遞減，逆定理也不對。

例 1. 函數 $y=x^3-6x^2+9x+2$ 的導數是

$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，

括弧 $(x-1)$ 與 $(x-3)$ 當 $1<x<3$ 時符號相反，而當 $x<1$ 或 $x>3$ 時符號相同。因此，

$$y'>0\ (x<1 \text{ 或 } x>3),\quad y'<0\ (1<x<3);$$

函數 y 當 $x<1$ 或 $x>3$ 時遞增，而當 $1<x<3$ 時遞減。通過直接計算

容易得到:

$$y=6\ (x=1),\quad y=2\ (x=3),$$

同時,又顯然有,

$$y\to-\infty\ (x\to-\infty),\quad y\to+\infty\ (x\to+\infty).$$

只要這樣簡短地研究一下,函數 y 的略圖(圖 22)就已經够清楚了。

例 2. 函數 $y=e^x-x-1$ 的導數是

$$y'=e^x-1,$$

當 $x>0$ 時 $y'>0$, 而當 $x<0$ 時 $y'<0$。因此當 $x>0$ 時函數 y 遞增, 而當 $x<0$ 時函數 y 遞減。因為當 $x=0$ 時 $y=0$, 所以對於 x 的其他所有的值 y 都取正值。這樣我們就證明了以下這個重要不等式

$$e^x\geqslant 1+x,$$

其中 x 可以取任何實數值, 等式只有當 $x=0$ 時才成立。

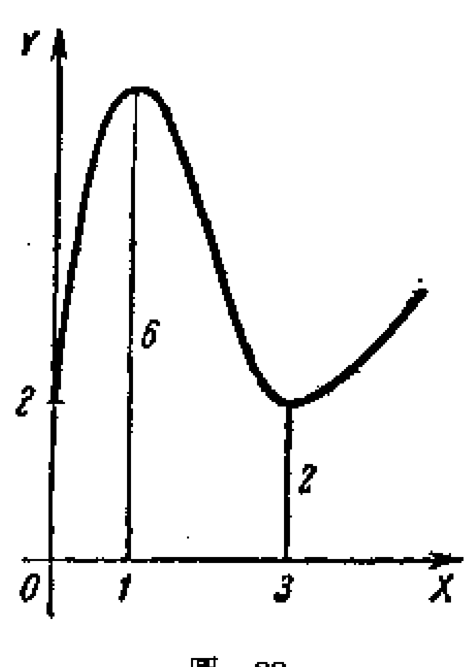


圖 22

另外一些有用的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集, 第二章,習題 320—325, 332, 339。

§ 41. 極值

假設函數 $y=f(x)$ 在區間 (a, b) 上的每一點都可微。如我們所知,它在這個區間上一定連續,因而它在這個區間上能够達到它的最大值與最小值(§23 定理 2)。但究竟在自變量取什麼值的時候, 函數才取它的最大值(或最小值)呢?這個問題具有很大的實際意義。比方說, 可能我們有某種機械設備,它的效率由函數 $f(x)$ 測定,而這裏 $f(x)$ 所依賴的量 x 可以由我們在某一個範圍 (a, b) 之內任意選擇。無疑地, 在這種情况下, 我們應該在這個區間上找出使 y 取最大值的那一個 x 值來(當然,我們對這個最大值也同樣感興趣)。我們以下就來看一看,

在這種問題上，微分法能夠有些什麽用處。

我們把函數 $y=f(x)$ 在區間 (a, b) 上的最大值叫做它的極大值，而最小值叫做極小值；每當我們想說"極大值或極小值"時，我們總是簡略地說成"極值"。假如我們談到的是函數在整個區間 (a, b) 上的極值，我們就往往說成"絕對"極值（極大值或極小值）。局部（相對）極值的概念也是很重要的：如果函數 $f(x)$ 在點 c $(a<c<b)$ 的值，比在充分接近 c 的一切點的值都大，也就是說，如果找得到一個正數 δ，使得當 $|h|<\delta$ 時，永遠有：

$$f(c+h)\leqslant f(c),$$

我們就說函數 $f(x)$ 在點 c 有一個局部極大值。類似地可以規定局部極小值。由於有 $a<c<b$ 這樣一個要求，所以局部極值僅僅對於區間 (a, b) 的內點才有定義。

圖 23 表明絕對極值與局部極值之間的差別：這個圖上所畫出來的函數 $y=f(x)$ 在點 c 有一個局部極大值，但它不是函數的最大值，因爲在離 c 較遠的某些點函數所取的值比 $f(c)$ 大。

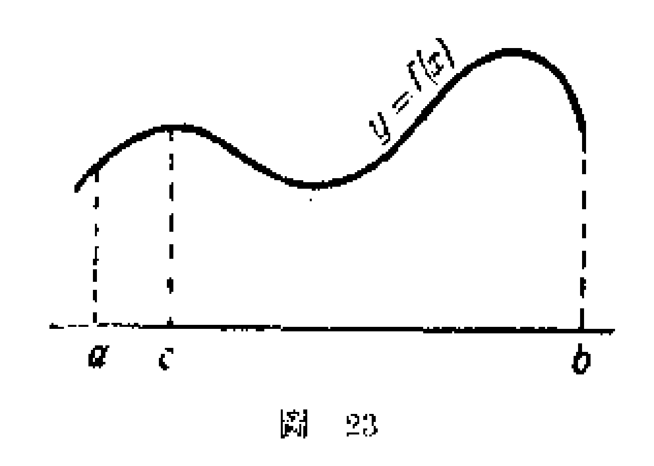


圖 23

顯然，如果函數在區間 (a, b) 上的最大值，能在區間的某一內點上達到，則這個絕對極大值同時也就是一個局部極大值。

因此，要想找出已知函數在已知區間上的絕對極大值（或極小值）我們可以按照以下的步驟來做：

1）找出函數在已知區間上所有的局部極大值（或極小值）；

2）把這些局部極大值（極小值）與函數在端點的值放在一起，取其中之最大者（最小者）❶。

❶ 如果函數在已知區間的個別點上沒有導數，則這些點當然應該和區間的端點一起補上去。請讀者看 $y=|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 這一例子。

如果在特殊情形(實際上正是在實際問題中經常出現的情形)，函數在已知區間上只有有限多個(並且通常是不多幾個)極值，則上面的第二個步驟並沒有什麼困難。因此，所有的困難都集中在第一個步驟了，如果已知函數是可微的，這一步驟可以用微分法來加以解決。

假設函數 $y=f(x)$ 在區間 (a,b) 的某一內點 $x=c$ 取局部極大值，並且假定函數在 $x=c$ 可微。根據§36的引理，我們可以斷定 $f'(c)=0$；當然，如果 $f(x)$ 在點 c 取局部極小值，我們也可以得到同樣的結論。因此，如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上的每一點都可微，則它的一切局部極值，如果存在的話，都可以在方程

$$f'(x)=0 \tag{1}$$

的根中間找到。因此，要解決我們的問題就應當先找出這個方程在 a 與 b 之間所有的根。方程 (1) 的根通常稱爲函數 $f(x)$ 的**穩定點**；這個名稱的意義是非常明顯的：函數 $f(x)$ 在這種點上的變化速度等於零；當 x 通過這種點時 $f(x)$ 變化的很慢，它的值具有特殊的穩定性。

這樣一來，我們首先應當找出函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上所有的穩定點；所有待求的局部極值都可以在這些點中間找到。假定 α 是這樣一個穩定點；我們應該能判明，它是否給出一個局部極值，如果是的話，那末它又是那一種類型的極值——極大值還是極小值。現在我們假定，函數 $f(x)$ 在點 α 除去有一級導數以外還有高級的導數；並且爲普遍起見，我們假定，

$$f'(\alpha)=f''(\alpha)=\cdots=f^{(n-1)}(\alpha)=0,$$

但 $f^{(n)}(\alpha)\neq0$ (如果 $f''(\alpha)$ 已經不爲零，則 $n=2$)。於是，§38 的戴勞公式 (T) 給出：

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=h^n\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}+o(h^n),$$

這裏，要想解決我們感興趣的問題，就應該研究，當 $|h|$ 充分小時，差 $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ 的符號。因爲上式右端的第二項在 $h\to0$ 時是比第一

項高級的無窮小，所以當 $|h|$ 充分小時，上式右端(因而左端)的符號與第一項的符號相同。因此，我們只需要來研究第一項的符號。

如果 n 是偶數，則 $h^n>0$，因而 $h^n\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ 的符號與 $f^{(n)}(\alpha)$ 的符號相同(這說明 $h^n\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ 的符號與 h 無關)；如果 $f^{(n)}(\alpha)>0$，則當 $|h|$ 充分小時我們有：

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)>0,$$

換句話說，在點 α 函數 $f(x)$ 有一個極小值；反之，如果 $f^{(n)}(\alpha)<0$，則當 $|h|$ 充分小時我們有：

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)<0,$$

這就說明，在點 α 函數有一個極大值。

如果 n 是奇數，則 $h^n\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ 的符號隨着 h 的符號而改變。因此，當 $|h|$ 充分小時，差 $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ 在 h 爲正時有一個符號，在 h 爲負時有剛好相反的符號。顯然，這就表明函數 $f(x)$ 在點 α 旣不可能有極大值，也不可能有極小值(函數 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 就是這種情形的例子：$f'(0)=f''(0)=0$，$f'''(0)\neq0$(參看 §40 的圖 21)，這裏點 $x=0$ 給出一個不達到局部極値的穩定點的典型例子)。

因此，我們得到了(在假定函數 $f(x)$ 可以微分足够多次的條件下)一個完全確定的，判定一個穩定點 α 的性質的方法：假定在導數 $f'(\alpha)$，$f''(\alpha)$，… 中第一個不爲零的是 $f^{(n)}(\alpha)$；於是：1) 如果 n 是奇數，則函數 $f(x)$ 在點 α 旣沒有極大値也沒有極小值；2) 如果 n 是偶數，則函數在點 α 有一個局部極値，並且當 $f^{(n)}(\alpha)>0$ 時有局部極小值，當 $f^{(n)}(\alpha)<0$ 時有局部極大値。

特別說來，當 $f'(\alpha)=0$，$f''(\alpha)>0$ 時我們有局部極小値，而當 $f'(\alpha)=0$，$f''(\alpha)<0$ 時我們有局部極大値；$f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$ 的情形不能確定，必須研究更高級的導數。

以上這個研究穩定點的方法只在這樣的情況下才不適用：或者函數 $f(x)$ 在點 α 根本沒有足够高級的導數，或者雖然有一切級的導數

但却都等於零，必需指出，這是一件饒有趣味而且很重要的事實，即上述的後一種情形實際上的確是有的（當然，$f(x)$ 在點 α 的某一鄰域內恆等於常量的簡單情形不算）。函數

$$y=f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

就在 $x=0$ 有一個穩定點，並且不難計算，在點 $x=0$，有

$$y'=y''=\cdots=y^{(n)}=\cdots=0;$$

這個函數在點 $x=0$ 的附近的形態非常簡單（參看圖 24），粗略一看，它與 $y=x^2$ 或 $y=x^4$ 之類的函數在 $x=0$ 附近的形態簡直沒有什麼大的差別；只是在距 $x=0$ 較遠以後，這些函數的形態才開始變得不一樣。

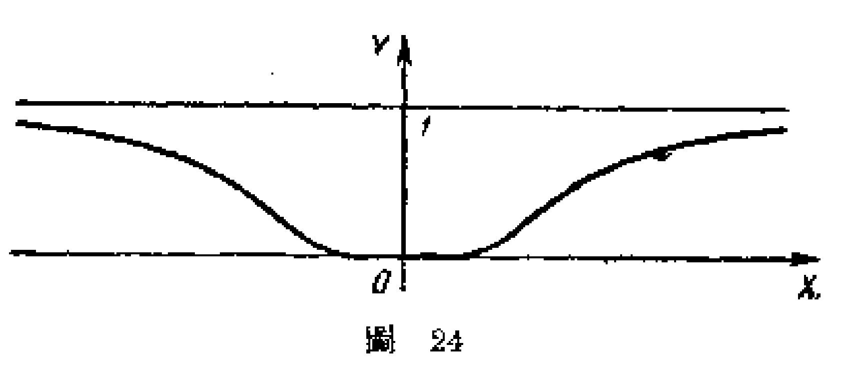


圖 24

上面這個研究穩定點的方法，由於它的完備性，在理論上是很有價值的，但在實際上常常用更簡便得多的方法來代替它，這類簡便方法通常不要求高級導數的存在。假定 α 是函數 $f(x)$ 的一個穩定點，也就是說 $f'(\alpha)=0$，於是要研究這一點的特性，在很多場合都只要確定 $f'(x)$ 在點 α 附近的符號就行了。比方說，如果當 $x<\alpha$ 時，我們永遠有 $f'(x)<0$，而當 $x>\alpha$ 時，永遠有 $f'(x)>0$（這裏 $|x-\alpha|$ 充分小），則函數 $f(x)$ 在 α 的左邊遞減而在 α 的右邊遞增，這就說明，函數在點 α 有一個局部極小值；如果 $f'(x)$ 的符號與上面剛好相反，我們就得到局部極大值；如果 $f'(x)$ 在所有充分接近 α 的點保持同一符號，則當 x 通過 α 時函數 $f(x)$ 或者永遠遞增或者永遠遞減，在這兩種情形下函數在點 α 都沒有局部極值。

儘管這個方法不使用高級導數，但是我們也不能把它估計過高，因爲，要想確定 $f'(x)$ 在一切充分接近 α 的點上的符號，在大多數情形

下，比計算某一些導數在點 a 的值還要更複雜。除此以外，這個方法僅僅在這種情形下才能達到目的：即 $f'(x)$，比方說，在 a 的右邊一切充分接近 a 的點上都取同一符號。但是，實際上很可能就不是這樣——以下這種情形的確是有的：當 $x\to a+0$ 時導數 $f'(x)$ 的符號變動無窮多次；假如是這種情形的話，則我們所講的方法在原則上就行不通了。

例 1. 求函數

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+2$$

在區間 $(0, 4)$ 上的絕對極大與絕對極小。在 §40 中研究這個函數時，我們已經看到，它有兩個穩定點：$x=1$ 與 $x=3$，其中第一個點給出局部極大值，而第二個點給出局部極小值。如果把已知區間端點的函數值也考慮在內，我們就可以斷言，$f(x)$ 取絕對極值的點只可能是 0，1，3，4 四點。但是，

$$f(0)=2,\quad f(1)=6,\quad f(3)=2,\quad f(4)=6;$$

因此，函數 $f(x)$ 在區間 $(0, 4)$ 上有兩個絕對極大值(當 $x=1$ 與 $x=4$)有兩個絕對極小值(當 $x=0$，$x=3$)。

例 2. 求函數

$$f(x)=\operatorname{sh} x-x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}-x$$

的一切局部極值。

我們有：

$$f'(x)=\operatorname{ch} x-1=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1,$$

首先，我們立刻看出，$x=0$ 是一個穩定點 $[f'(0)=0]$；其次，

$$f''(x)=\operatorname{sh} x,\qquad f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=\operatorname{ch} x,\qquad f'''(0)=1;$$

因此，第一個不爲零的導數是奇數級(三級)的，所以在穩定點 $x=0$ 函數 $f(x)$ 沒有局部極值。剩下我們來證明，沒有其他的穩定點存在。從上面得到的 $f'(x)$ 的表達式，我們直接看到：

$$f''(x)\begin{cases}<0 & (x<0),\\ >0 & (x>0);\end{cases}$$

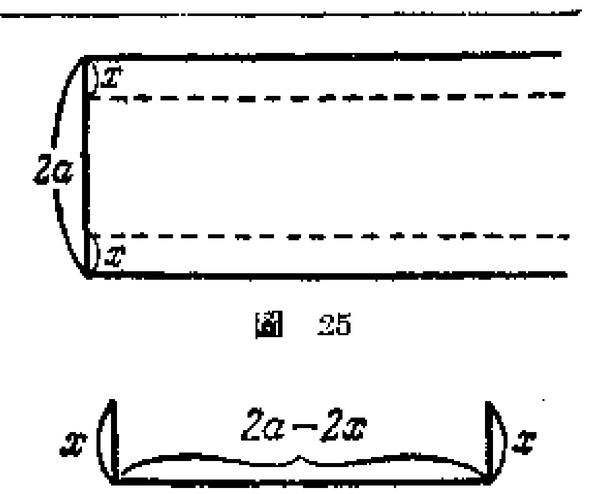


圖 25

圖 26

由此可見，當 $x<0$ 時 $f'(x)$ 遞減，而當 $x>0$ 時 $f'(x)$ 遞增；但因爲 $f'(0)=0$，所以對於一切 $x\neq0$ 都有 $f'(x)>0$，換句話說，除 $x=0$ 外函數 $f(x)$ 再沒有穩定點（這個函數的圖形大體上與 $y=x^3$ 的圖形相似，參看 § 40 的圖 21）。因此，函數 $f(x)$ 沒有任何局部極值。

例 3. 有一塊寬 $2a$ 的長方形的馬口鐵片。現在要把它的兩邊寬度爲 x（圖 25）的邊緣分別折向上，做成一個（向上開口的）水槽，它的橫斷面如圖 26 所示。問我們所折邊緣的寬度 x 應當取什麼值，這個水槽的容積才最大？

顯然，問題的解與水槽的長度無關——水槽的容積與它的橫斷面的面積 $2x(a-x)$ 成比例。因此，我們只需要求函數

$$f(x)=2ax-2x^2$$

在區間 $(0,a)$ 上的絕對極大值。我們有：

$$f'(x)=2a-4x,$$

由此可見，只有唯一的一個穩定點 $x=\frac{a}{2}$。因爲（對於任意的 x，特別說來對於 $x=\frac{a}{2}$）$f''(x)=-4<0$，所以在 $x=\frac{a}{2}$，$f(x)$ 有一個局部極大值

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}a^2.$$

這個局部極大值也是絕對極大值，因爲 $f(0)=f(a)=0$。因此，最有利的折法是，所折邊緣的寬度爲已知長方形寬度的四分之一。

讀者可以在任何一本數學分析習題集中找到大量的練習。特別是，我們向讀者建議 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第二章，習題 436—444，448，452—466，468—472，539，541，542，546，552，558。

第三篇　積分學初步

第十一章　微分運算的逆運算

§ 42. 原函數的概念

如果某物體的運動規律由方程

$$s=f(t)$$

給出，其中 t 是時間，s 是物體走過的路程，則把函數 $f(t)$ 進行微分就得到這個運動在已知時刻的瞬時速度

$$v=f'(t).$$

但是，在力學裏我們更常遇到的，不是這種問題，而是這種問題的逆問題；即已知在任一時刻 t 物體的速度是 $v=v(t)$，而要去找出這個物體運動的規律，換句話說，要去找出它所走過的路程與時間的依賴關係。我們怎樣來解決這個問題呢？我們知道，已知的速度 $v=v(t)$是（我們正要去找的那個表達物體運動規律的函數）$s=f(t)$ 的導數。因此，未知函數 $f(t)$ 的導數 $f'(t)=v(t)$ 是已知的，目的是要找出函數 $f(t)$。顯然，這個問題是微分學的基本問題的逆問題：微分學裏的問題是，已知函數要找出它的導數；剛好相反，這裏的問題是，已知導數要找出原來的函數。

例如，假定已知在時刻 t 物體運動的速度等於

$$v=at,$$

其中 a 是一個常數，那末怎樣來求運動的規律呢？爲此，我們要去找出一個函數，它的導數剛好是 at。不難知道，函數

$$\frac{at^2}{2}$$

就是這樣的一個函數。但是，我們能不能斷定我們要找的運動規律就是

$$s=\frac{at^2}{2}$$

呢？顯然，這樣的斷言是過早的：要知道，除去函數$\frac{at^2}{2}$外，可能還有其他的函數，它們的導數也等於 at；要是這樣的話，如果沒有任何附加的條件，我們就不能夠確定，在這些函數中究竟那一個函數是我們要找的運動規律。不難看出，上述這種其他函數的確是存在的：函數

$$s=\frac{at^2}{2}+b \tag{1}$$

的導數就也是 at，其中 b 是任意一個常數；因此，我們得到了一族函數，它們中的每一個都有同樣的可能來代表我們要找的運動規律。其實，我們還不知道，函數族(1)是否把所有以 at 爲導數的函數都包括在內了，也就是說，是否在函數族(1)之外還有其他的函數，它們的導數也都是 at。

以上考慮的這個問題可以很自然地加以推廣。如我們所知，函數 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 永遠代表這個函數（對於自變量 x）的變化速度。在許多實際問題中，常常提出這樣的問題：要找一個函數，它關於 x 的變化速度對於任何 x 的值都是已知的。顯然，在數學裏這個問題就是，要從已知的導數求出原來的函數，也就是說，要解決微分學的基本問題的逆問題。現在我們把這個問題的一般形式提出來，並且引進一些必要的術語；同時我們力求瞭解這個問題的解法的全貌。

已知一個函數 $f(x)$ 確定在某一個區間上（或者在整個數軸上）；我們的問題是，要找出所有這樣的函數 $F(x)$，使得在已知區間上的任何一點都有：

$$F'(x)=f(x).$$

每一個這樣的函數都稱爲 $f(x)$ 的**原函數**，因此，導數的概念與原

函數的概念是互逆的❶。

當然，我們不能預先斷定，一個已知函數 $f(x)$ 究竟有沒有原函數，如果有的話，究竟有幾個，並且它們相互之間的關係如何。但是，在這一方面的某些問題，我們卻可以根據很淺近的理由馬上得到解決。首先，上面我們已經看出，如果 $F(x)$ 是已知函數 $f(x)$ 的原函數，則函數族

$$F(x)+C, \tag{2}$$

(其中 C 是一個任意常數) 中的任何一個函數也一定是函數 $f(x)$ 的原函數。我們現在要證明，$f(x)$ 的每一個原函數還都一定是在函數族(2)之內。事實上，假定 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一個原函數；作差 $\Phi(x)-F(x)$；顯然，這個差的導數對於任何 x 都等於零，於是根據 § 36 的最後一個定理，$\Phi(x)-F(x)$ 是一個常量 c. 從而，

$$\Phi(x)=F(x)+c,$$

這就是說，函數 $f(x)$ 的任何一個原函數 $\Phi(x)$ 都屬於函數族 (2)。

因此，我們得到了下面的重要結果。

定理. 如果函數 $f(x)$ 有一個原函數 $F(x)$，那末它就有無窮多個原函數，並且所有的原函數剛好組成函數族(2)。

這個結果的重要性是很明顯的：它表明，要找出函數 $f(x)$ 所有的原函數只要隨便找出一個原函數就够了；如果找到了這樣一個原函數，則任何其他的原函數都可以由它加上某一個常數來得到。這樣一來，我們原來所提出來的問題就立刻變簡單了許多，它變成：我們要知道，函數 $f(x)$ 是否至少有一個原函數，如果有的話，找出这樣一個原函數來。

求已知函數的原函數的過程稱爲該函數的積分法。我們可以說，積分法是從某一個函數的導數到這個函數本身的過程。如果我們把這個過程看成是一種運算，那末我們就可以說，積分法是微分法的逆運算；

❶ 原函數另外也有人叫做已知函數的不定積分；但是以後我們不用這個術語。

如果先把一個已知函數微分一次，然後再積分，則適當選擇公式 (2) 中的常數 C，我們就回到原來的函數。

現在可以回憶一下，從前我們把求出已知函數的導數與求出它的微分都叫做微分法。因此它的逆運算——積分法——就可以確定為從導數求出原來的函數或者從微分求出原來的函數。由於未知函數的微分 $dF(x)$ 等於 $F'(x)dx$，所以給出微分與給出導數其實是一回事。

積分的結果得到原函數。因此，每一個可微的函數 $F(x)$ 都是它自己的導數 $F'(x)$（或者它自己的微分 $dF(x)=F'(x)\,dx$）的原函數。

從前我們用符號 d 表示微分運算。現在我們用符號 $\int$ 來表示積分運算。由於求原函數（積分法）是求微分（微分法）的逆運算，所以符號 d 與 $\int$ 就代表兩個互逆的運算。如果我們對已知函數 $F(x)$ 先實行運算 d，然後再實行運算 $\int$，則適當選擇那個要加上的常數我們就可以回到原來的函數 $F(x)$：

$$\int dF(x)=F(x),$$

因為 $dF(x)=F'(x)dx$，上式也可以寫作：

$$\int F'(x)dx=F(x).$$

如果 $F'(x)=f(x)$，則

$$F(x)=\int f(x)dx;$$

因此，這種記法的含義就是：函數 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的原函數。不過：我們通常不用表達式

$$\int f(x)\,dx$$

來代表某一個原函數，而是讓它代表函數 $f(x)$ 的**整個**原函數**族**；因此，如果 $F(x)$ 是一個原函數，則我們應該寫

$$\int f(x)dx=F(x)+C; \tag{3}$$

其中 C 是一个任意常数,即所謂"积分常数"。自然,按照定义,等式(3)与等式

$$F'(x)=f(x)$$

是完全等价的。

等式(3)的左端的函数 $f(x)$ 称为"被积函数",乘积 $f(x)\,dx$ 称为"被积表达式"。

例 1. 因为 $d(x^3)=3x^2\,dx$, 所以

$$\int 3x^2\,dx=x^3+C.$$

例 2. 因为 $d\operatorname{tg}x=\frac{dx}{\cos^2 x}$, 所以

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$$

等等。

这两个例子很清楚地説明,任何一个求导数(或微分)的公式,只要反过来从右往左讀,就得出一个积分法的公式。根据这样一个观点来看 § 29 末尾的簡单函数的导数表,我們不难得出以下的結果。

1. $\int 0\cdot dx=C$ (零的原函数等于一个任意常数)。

2. $\int 1\cdot dx=x+C$, 并且,一般説来

$$\int a\,dx=ax+C,$$

其中 a 是任意一个常数。

3. 对于任何一个常数 $\alpha\neq-1$, 又 $x>0$

$$\int x^{\alpha}\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,$$

而(当 $x>0$)

$$\int x^{-1}\,dx=\int\frac{dx}{x}=\ln x+C.$$

对于这个等式必须作如下的补充。因为当 $x<0$ 时，函数 $\ln(-x)$ 有导数 $\frac{1}{x}$，所以，当 $x<0$ 时

$$\int \frac{dx}{x}=\ln(-x)+C;$$

因此，不論 $x>0$ 或 $x<0$ 我們都有下面的一般公式：

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

4.
$$\int e^x\,dx=e^x+C,$$

并且对于任何正数 $a\neq 1$

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$$

5. 对于多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,

$$\int P(x)\,dx=\frac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\frac{a_1x^n}{n}+\cdots+a_nx+C.$$

可見，多项式的原函数仍旧是多项式，它的次数比原来高一次。

6.
$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C,$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C.$$

7.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C \text{ 或 } -\arccos x+C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C \text{ 或 } -\operatorname{arc\,ctg} x+C,$$

8.
$$\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C,$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$$

以上这些公式都可以用下面的办法来驗証：証明等式右端的导数等于左端的被积函数；全部这里的公式都可以从 § 29 末尾导数表中相应的公式推出来。

因此，我們已經知道了一系列的簡单函数的原函数。然而，这样一点点知識实在是非常有限的，因为我們还只会积分那些出現在微分公式表里的公式右端的函数。而这些函数甚至于連一些最簡单的初等函数也沒有包括进去；例如，在它們中間就沒有 $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ 等等。实际上，到現在为止我們还沒有見到过这样的函数，它們的导数是 $\ln x$ 或 $\operatorname{arctg} x$；因此，我們不但不能够求原函数

$$\int \ln x \, dx \quad 或 \quad \int \operatorname{arctg} x \, dx,$$

甚至于不知道这些原函数是否存在。

积分法的問題在原則上要比微分法的問題困难的多。这首先是决定于这两个問題在邏輯上的性质的差异。求已知函数的导数是很簡便的，这是因为导数的定义带有“构造性”：导数被直接規定为

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

换句話說，是直接規定为某些确定的运算加在已知函数上的結果。例如，当我們求函数 $\sin x$ 的导数时，我們完全知道如何去着手这一工作以及如何把这一工作进行到底。但是原函数的定义就完全是另一回事了；在原函数的定义里就沒有任何构造性的成分，它沒有告訴我們应該怎样去求原函数，甚至于沒有告訴我們应該怎样着手这項工作。例如，假定要我們求

$$\int \ln x \, dx,$$

我們在表中公式的右端的那些函数中就找不到 $\ln x$，于是我們現在就

沒有任何办法来解決这个問題。

跟这个困难密切相关的是，对于积分的运算我們还沒有一整套的法則；而在微分法里，則是有这样一套法則的，在知道某些函数的导数以后，我們就可以很容易地求出它們的各种組合(和、积、复合函数等等)的导数。积分理論所拥有的这一类法則是为数不多的，并且它們应用的范圍也比較窄。不过尽管如此，积分法的这些一般方法的作用还是很大的，因为借助于这些方法，我們毕竟还是可以积分够多的函数，而且这些函数正好是平时最常碰到的函数。在下节里，我們将要考虑这些方法当中最簡单的一些。应該指出，在微分法里我們几乎是机械地应用那些一般方法，但是在积分法里应用一般方法时就要求高度的技巧——在每一个个别情形，都要会找合适的方法，并且要最有效地应用它。要掌握这些技巧只有长时期的练习才行。

讀者可以在 Б. П. 捷米多維奇的习题集，第三章中找到大量的习题。

关于函数的积分法以及原函数的性质的理論称为**积分学**，这个理論与微分学合起来就构成了数学分析的最重要的部分。

§ 43. 积分法的一些簡单的一般方法

1. **如果** $y=u_1\pm u_2\pm\cdots\pm u_n$ **是** x **的** n **个函数的代数和，又对于所有的** $k(1\leqslant k\leqslant n)$，$\int u_k\,dx$ **都存在，則** $\int y\,dx$ **也必定存在，并且**

$$\int y\,dx=\int u_1\,dx\pm\int u_2\,dx\pm\cdots\pm\int u_n\,dx. \tag{1}$$

这个法則常常簡单地說成：“代数和的原函数等于原函数的代数和”。要想証明等式(1)，只需要証明等式右端的导数存在并且就等于 y 就行了；但是，根据代数和的微分法則(§ 29 法則 3°)，这显然是对的。

2. 如果 u 是 x 的函數，a 是一個常數，又 $\int u dx$ 存在，則 $\int au\,dx$ 也必存在，並且

$$\int au\,dx = a\int u dx. \qquad (2)$$

簡單地說："常數因子可以拿到原函數的符號外面來"。要證明 (2) 只消微分等式的右端，並且利用常數因子可以拿到微分符號之外來的定理。

到現在爲止，上面所考慮的兩個法則，剛好是相應的微分法則，完全顛倒過來。但是，我們馬上就要看到，這裏可以完全顛倒過來的微分法則已經沒有了；所有其他的法則都只能部分地顛倒過來，因而由此導出的積分公式雖然有時非常有用，但決非在所有的情形下都能應用。

還要注意，在 (1) 與 (2) 兩式的右端我們沒有加上積分常數。在這裏加上積分常數是不必要的，因爲在這兩個等式的右端都還有（一個或幾個）原函數的符號；根據我們的了解，這些符號已經代表整個原函數族，因而它們已經隱含了任意常數在內。以上這個說明對於下面的公式也適用。

3. **分部積分法**　現在我們來看一看，把兩個函數之積的微分公式

$$(uv)' = uv' + vu'$$

顛倒過來會導出什麼樣的積分公式。積分這個等式，我們得到：

$$\int (uv)'\,dx = uv = \int (uv' + vu')\,dx;$$

從而，在右端用法則(1)，我們得到：

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx.$$

這個公式包含兩個原函數；因此，我們不能利用它來同時求出這兩個原函數，而只能把其中的一個用另一個表達出來，例如：

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx. \qquad (3)$$

這個公式能告訴我們一些什麼呢？如果 u 與 v 都是已知的，則根據這個公式，原函數 $\int uv'dx$ 可以用已知函數 uv 與另一個在構造上和它相似的原函數 $\int vu'dx$ 表達出來。雖然這兩個原函數都依賴於函數 u 與 v，但很可能其中的一個比另一個要簡單一些；比如說，假定第二個（在等式右端的）比第一個簡單，則公式(3)就有了很明顯的好處，因爲它把求某一個原函數的問題化成了求另一個更簡單的原函數的問題。在有些情形甚至有這樣的可能：等式右端的原函數是 § 29 的微分表裏已經有的，或者是我們預先已經研究過的；在這種情形下，只要利用公式(3)我們就可以把原函數 $\int uv'dx$ 完全求出來。

要知道公式（3）的力量，或是在應用它時的一些特點，最好是用具體例子來說明。這個公式稱爲**分部積分公式**❶。

例 1. 我們已經說過，現在對我們來說 $\int \ln x\, dx$ 還是未知的，因爲我們不知道有那一個函數的導數等於 $\ln x$。但是只要利用分部積分的公式這個原函數是不難求出來的。要利用公式(3)，我們應該把被積函數表成兩個函數之積的形狀，第一個函數取作 u，第二個函數取作 v'。要這樣做，可以有無窮多種方法，而我們就應該善於在這許多方法中來選取這樣的一個，使得公式(3)右端的原函數 $\int vu'\,dx$ 變得儘可能地簡單。但是，我們怎樣能夠預先知道該選取那一個呢？爲此，我們只要回想一下，函數 $\ln x$ 的導數等於 $\frac{1}{x}$，它比 $\ln x$ 要簡單的多。從原函數 $\int uv'\,dx$ 到原函數 $\int vu'\,dx$ 的過程中，函數 u 換成了它的導數 u'，因此，如果我們取 $u=\ln x$，我們就可以指望在這個過程中給定的原函數能夠化簡。但是從 $uv'=\ln x$ 與 $u=\ln x$ 可知 $v'=1$，因此我們應該把 v 取作導數爲 1 的一個函數；最簡單的取法當然就是 $v=x$。因此，

---

❶ 在一般情形下，這個公式給不出原函數 $\int uv'dx$ 的最後表達式，而只是把它化成了另外一個更簡單的原函數；由於它只是把問題化簡了，所以它只能算是部分地解決了我們求 uv' 的原函數的問題。因此許多歐洲語都用"部分積分法"這個名詞；至於另外有些語言所用的"分部積分法"這個名詞，我們也這樣用，其實是比較詞不達意的。

$$u=\ln x,\qquad u'=\frac{1}{x},$$

$$v'=1,\qquad v=x.$$

$$uv'=\ln x,\qquad vu'=1,$$

因而公式(3)就給出：

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int 1\cdot dx=x\ln x-x+C.$$

我們由此看到，在這個例子中，利用公式(3)澈底解決了我們的問題。驗證一下這個解答通常對我們是有益的，不難看出，我們所找到的這個函數的導數的確等於 $\ln x$。

同樣的辦法，我們可以利用分部積分法來求出下列更一般的形式的原函數

$$\int x^{\alpha}\ln x\,dx,$$

其中 α 是任意一個常數．如果 $\alpha\neq-1$，則我們令：

$$u=\ln x,\qquad u'=\frac{1}{x},$$

$$v'=x^{\alpha},\qquad v=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$uv'=x^{\alpha}\ln x,\qquad vu'=\frac{x^{\alpha}}{\alpha+1},$$

根據公式(3)不難得到：

$$\int x^{\alpha}\ln x\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x-\frac{1}{\alpha+1}\right)+C.$$

如果 $\alpha=-1$，則我們有：

$$u=\ln x,\qquad u'=\frac{1}{x},$$

$$v'=\frac{1}{x},\qquad v=\ln x,$$

由公式(3)得到：

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

在這個等式右端出現的原函數與我們要找的原函數完全一樣。但儘管這樣，這個關係式卻解決了我們的問題，因為由它可以推出：

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln^2 x,$$

因而
$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

例 2. 假定我們要求原函數

$$\int x e^x\,dx.$$

被積函數的兩個因子中，第二個因子微分或積分之後都不變，而第一個因子微分之後則等於 1，比原來函數要簡單些；因此，我們不妨令 $u=x$，$v'=e^x$ 試試看；這就給出

$$u=x, \qquad u'=1,$$
$$v'=e^x, \qquad v=e^x,$$
$$uv'=xe^x, \qquad vu'=e^x;$$

利用公式(3)我們得到：

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C,$$

於是，問題就完全解決了。

現在假定我們要求 $\int x^2 e^x\,dx$；用同樣的方法，我們令：

$$u=x^2, \qquad u'=2x,$$
$$v'=e^x, \qquad v=e^x,$$
$$uv'=x^2e^x, \qquad vu'=2xe^x,$$

於是公式(3)給出：

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx;$$

因為等式右端的原函數上面已經求出來了，所以原函數 $\int x^2e^x\,dx$ 本身也就可以求出來。一般說來，要想求原函數

$$\psi_n(x)=\int x^ne^x\,dx,$$

其中 n 是任意一個自然數。我們可以令：

$$u=x^n,\qquad u'=nx^{n-1},$$
$$v'=e^x,\qquad v=e^x,$$
$$uv'=x^ne^x,\qquad vu'=nx^{n-1}e^x,$$

於是公式(3)給出：

$$\psi_n(x)=x^ne^x-n\int x^{n-1}e^x\,dx=x^ne^x-n\psi_{n-1}(x);$$

這是一個遞推公式，它把 $\psi_n(x)$ 用 $\psi_{n-1}(x)$ 表達了出來；因為 $\psi_0(x)$ 與 $\psi_1(x)$ 都是已知的，所以利用這個公式我們不難依次求出 $\psi_2(x)$，$\psi_3(x)$ 以及，一般說來，$\psi_n(x)$（對於任何一個 n）。並且還不難看出，對於任何 n 我們都有：

$$\psi_n(x)=\int x^ne^x\,dx=P_n(x)e^x+C,$$

其中 $P_n(x)$ 是某一個 n 次的多項式。

更多的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第三章，習題 123－136[1]。

4. **變量的替換**　我們現在來看一看，在積分學裏可以怎樣利用複合函數的微分公式。假定 $f(u)$ 是我們會積分的一個函數，又 $F(u)$ 是它的原函數之一，於是

$$F'(u)=f(u),\quad \int f(u)du=F(u)+C.$$

如果我們把變量 u 算作另一個新變量 x 的函數，$u=\varphi(x)$，則我們有：

$$y=F(u)=F[\varphi(x)],$$

---

[1] 注意，在 Б. П. 捷米多維奇的習題集裏，把一個函數的原函數稱為這個函數的積分。

根據複合函數的微分法則(當然,要假定函數 $\varphi(x)$ 是可微的)

$$dy=F'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=f[\varphi(x)]d\varphi(x);$$

因爲這是函數 $y=F[\varphi(x)]$ 的微分,所以反過來就得到:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C.$$

因此,如果

$$\int f(u)du=F(u)+C$$

又 $\varphi(x)$ 是任意一個可微函數,則

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C.$$

換句話說:如果 $u=\varphi(x)$,又函數 $\varphi(x)$ 是可微的,而且函數 $f(u)$ 有原函數,則

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=\int f(u)du \qquad (4)$$

(等式右端在積分後必須代入 $u=\varphi(x)$)。跟分部積分法的情形一樣,一般說來,關係式(4)僅僅把求一個原函數的問題化成求另一個原函數的問題;但是,也跟那裏一樣,這第二個原函數可能比第一個更簡單些,特別說來,這第二個原函數可能是我們已經知道的;在這種情形,第一個原函數就可以直接寫出來了。

因爲關係式左邊的可微函數 $u=\varphi(x)$ 可以任意選擇,所以利用關係式(4),每一個我們會積分的函數 $f(u)$ 的原函數都可以直接變換成無窮多個新的原函數。但是也正是由於函數 $\varphi(x)$ 的選擇有非常廣泛的任意性,所以運用換元法(就是我們現在所考慮的積分方法的稱呼❶)比起運用分部積分法來要求更多的特殊靈活的技巧,要達到這個要求只有經過長時間的練習才行。在每一個個別的情形,問題都是這樣:我們希望找某一個函數 $\psi(x)$ 的原函數;爲此,我們必須選擇這樣一個可

❶ 有時也稱爲變量替換法。

微函數 $\varphi(x)$，使得

$$\psi(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

或者，也就是說，

$$\psi(x)\,dx=f[\varphi(x)]\,d\varphi(x),$$

其中函數 $f(u)$ 的原函數

$$\int f(u)\,du=F(u)+C$$

要是已知的。如果能作到這一點，則根據(4)我們可以直接寫出

$$\int \psi(x)\,dx=F[\varphi(x)]+C,$$

於是我們的問題就解決了。因此，這個問題的困難就在於怎樣去找出這個適當的函數 $\varphi(x)$。至於究竟在個別情形應該如何考慮才能對我們的問題有所幫助，最好還是用具體例子來加以說明如下：

例 3. 求原函數

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

因為 $\sin x\,dx=-d\cos x$，所以

$$\int \operatorname{tg}x\,dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos x};$$

這就很自然地使我們想到，不妨令 $\cos x=u$；於是在公式 (4) 中，我們應該令 $f(u)=\frac{1}{u}$，$\varphi(x)=\cos x$，因而，

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=-\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\int \frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C,$$

這就解決了我們的問題。

完全類似的，令 $u=\sin x$，我們就得到：

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx=\int \frac{d\sin x}{\sin x}=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\sin x|+C.$$

以上這兩個問題都是下面這個經常遇到的一般問題的特殊情形。

假定$\varphi(x)$是一個可微分函數,問題是要找$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$的原函數。令$\varphi(x)=u$,我們就有$\varphi'(x)dx=du$,因而,

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\varphi(x)|+C.$$

例如,
$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C,$$

$$\int\frac{e^xdx}{e^x+1}=\ln(e^x+1)+C$$

等等。

例 4. **求原函數**

$$\int\frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

因爲被積表達式的分子,除去差一個常因子外,等於分母中根號裏的和$1+x^2$的微分,所以我們不妨把這個根式取作一個新的變量來試試看:

$$u=\sqrt{1+x^2},$$

於是
$$du=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{xdx}{u},$$

即
$$xdx=udu,$$

因此,我們得到:

$$\int\frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{udu}{1+u},\tag{5}$$

這就是說,在這裏我們把求給定的原函數的問題化成了求另一個簡單一些的原函數的問題,這後一個原函數,再用一個新的變量替換很容易就可以求出來。令$1+u=v$,我們有:

$$u=v-1,\ du=dv,$$

因而,

$$\int\frac{udu}{1+u}=\int\frac{v-1}{v}dv=\int dv-\int\frac{dv}{v}=v-\ln|v|+C=$$

$$=1+u-\ln(1+u)+C;$$

因此，等式(5)給出：

$$\int\frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}-\ln(1+\sqrt{1+x^2})+C^*,$$

其中 $C^*=1+C$ 也是一個任意常數。

上面這個問題的解決是藉助於變換 $u=\sqrt{1+x^2}$；但是根據同樣的考慮，我們也可以不把根式取作新變量，而把根號裏面的表達式 $1+x^2$ 取作新變量來試一試；這樣做法得到：

$$u=1+x^2,\quad du=2xdx,\quad xdx=\frac{1}{2}du,$$

於是我們有：

$$\int\frac{xdx}{1+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+\sqrt{u}}.$$

這個新的原函數也已經是够簡單的了。令 $1+\sqrt{u}=v$，我們就有：

$$u=(v-1)^2,\quad du=2(v-1)dv,$$

也就是說，

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+\sqrt{u}}=\int\frac{v-1}{v}dv;$$

這也就是在前一個變量替換最後所得到的那個原函數。因此，我們看出，在某些情形下，用不同的變量替換都可以達到目的，而且其難易程度相差不多。

例 5. 在函數的積分法裏我們常常會遇到下面這個帶一般性的簡單問題：已知函數 $f(x)$ 的原函數

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C;$$

要來求函數 $f(ax)$ 的原函數，其中 a 是一個已知常數。我們不妨假定

$a\neq 0$（當 $a=0$ 時，$f(ax)=f(0)$ 是一個常數，問題自然很容易解決），並且令 $ax=u$，於是 $dx=\dfrac{du}{a}$；因而

$$\int f(ax)\,dx=\int f(u)\frac{du}{a}=\frac{1}{a}F(u)+C=\frac{1}{a}F(ax)+C.$$

因此，如果

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

並且 $a\neq 0$，則

$$\int f(ax)\,dx=\frac{1}{a}F(ax)+C.$$

例如，

$$\int \sin kx\,dx=-\frac{1}{k}\cos kx+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}=\frac{1}{a}\arcsin(ax)+C$$

等等。

但是，我們也常常遇到相反的情況，有時我們不會積分函數 $f(u)$，而以相反的方向來利用公式(4)，把等式右端難求的原函數代之以等式左端的原函數，只要適當地選擇函數 $\varphi(x)$ 有時就可能使問題變得簡單。例如，直接求原函數

$$\int \sqrt{1-u^2}\,du$$

是困難的；但如果令 $u=\sin x$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，則由公式(4)得到：

$$\int \sqrt{1-u^2}\,du=\int \cos^2 x\,dx;$$

後面這個原函數讀者自己不難求出：

$$\int \cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C;$$

其中應該以 $x=\arcsin u$，$\sin x=u$，$\cos x=\sqrt{1-u^2}$ 代入，因而求出了：

$$\int \sqrt{1-u^2}\,du=\frac{1}{2}(\arcsin u+u\sqrt{1-u^2})+C.$$

更多的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第三章，習題 28—60，101—120。

在這一節裏，我們所討論的關於積分函數的一些最簡單的一般性的方法，已經是這種方法的全部。這些方法的數量是很不多的，而且，通常它們不能解決在一切可能出現的情況下所提出的問題；在運用這些方法時，還不能是機械地搬用，而是對於每一個個別問題都需要作個別的特殊處理。不過，雖然是這樣，但就這些方法的全體來說，却已經使我們能够積分十分廣泛的一類初等函數。我們不久（第16章）還要回到這個問題。現在我們應該來學習對於積分學的基本問題的另一種全新的看法，這種看法首先大大地擴大了並且加強了積分學與現實世界的聯繫，以及它作爲精確的自然科學與技術科學的工具的作用。

第十二章　積分

§ 44. 曲邊梯形的面積

我們現在來考慮一系列屬於各種不同的知識領域的問題，這些問題的解決最後都歸結到同一個必要的數學工具。最初一看，這個工具好像跟函數的微分法與積分法並沒有什麼直接的關係；在歷史上它的發展也在長時期內與這兩種運算互不關聯。還是一直到十七世紀末才開始明白，只要把這些問題與積分學中一定的問題聯系起來，我們就可以得到解決這些問題的最有力的和一般的方法。我們不久就可以看到，這究竟應該怎樣來做。

初等幾何僅僅教給我們如何計算由直線段和圓弧所圍成的平面圖形的面積。計算由任意形狀的曲線所圍成的平面圖形的面積，是一個一般的幾何問題，這個問題只有用數學分析的方法才能夠解決。這個問題在理論上與實際上的現實性是很明顯的，並不需要任何特別的說明。

任意一條曲線圍成的圖形(圖27)常常可以用兩組互相垂直的直線把它分成若干部分，每一部分都是一個"曲邊梯形"，所謂"曲邊梯形"是這樣的圖形，它有三條邊是直線，其中兩條互相

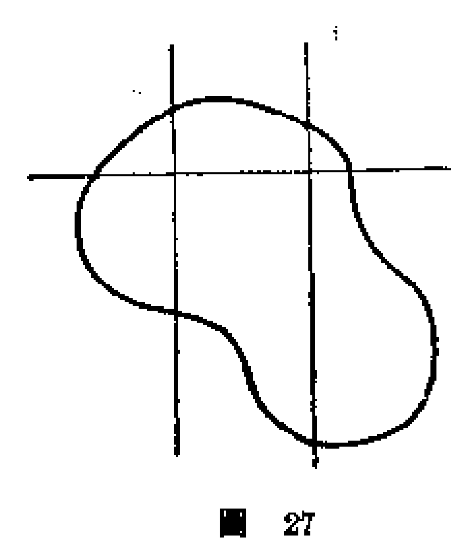


圖　27

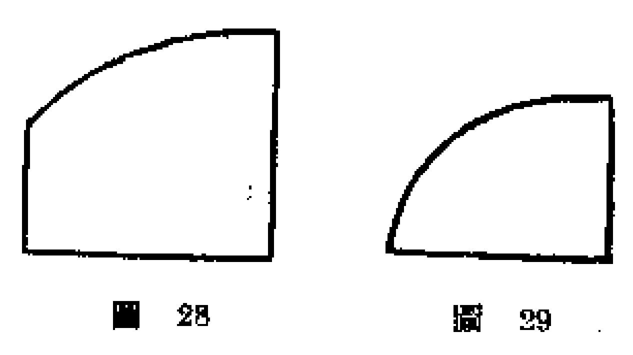


圖　28　　　　圖　29

平行，第三條與前兩條互相垂直(圖 28)；第四邊是一條曲線的一段弧，

它與任一條平行於它的鄰邊的直線至多只交於一點。在這裏並不除去下述的情形（圖 29）：兩條平行的邊中有一條縮成了一點，因而曲邊梯形變成了曲邊三角形。這樣一來，我們的問題就化成了求曲邊梯形面積的問題。

我們現在這樣來取一個直角坐標系，使得曲邊梯形的曲邊的對邊與OX軸相合，而曲邊梯形位於上半平面（圖 30）。令 a 與 b $(a<b)$ 代表曲邊梯形底邊的兩個端點的坐標，並且假定曲邊是函數 $y=f(x)$ 的圖形。

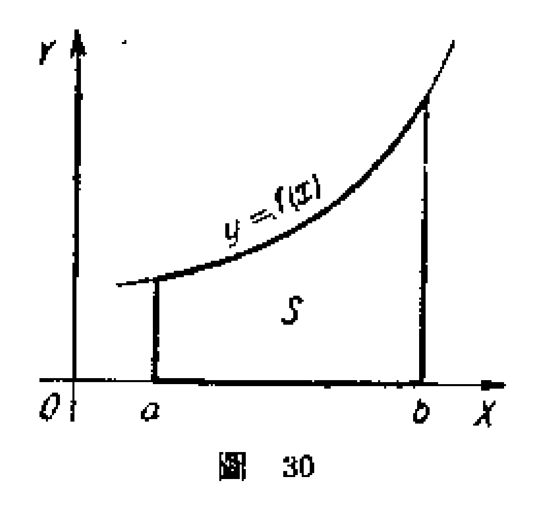


圖 30

我們提出這樣的任務——要來求這個曲邊梯形的面積 S。但是在這裏，我們千萬不要忘記，對於任意曲線圍成的圖形來說，它的面積的概念我們還沒有在任何地方作過規定——在初等幾何裏，僅僅對於直線圍成的圖形（多邊形）以及圓的一部分規定了面積的概念。因此，在這個問題面前，我們又恰恰是處於 § 26 中我們提出要規定變速運動的瞬時速度時同樣的境況之下。跟那裏一樣，我們現在的任務也是雙重的：我們必須給未知的面積概念下一個適當的定義，同時要提供出計算這個面積的工具。也跟那裏一樣，我們現在要同時來解決這兩個問題。

我們首先回想一下，在初等幾何裏計算圓的面積時，在實質上我們已經利用了數學分析的基本運算——極限過程：我們把圓的面積定義作某些多邊形面積的極限，而多邊形的面積用初等幾何的方法就可以算出來。很自然地，我們當然可以把這個方法用到現在的一般情形來。為此目的，我們在 a 與 b 之間插入分點 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，這樣就把區間 (a, b)——我們的曲邊梯形的底——分成了 n 個部份（區間），並且為了一致起見，我們令 $a=x_0$，$b=x_n$，於是有

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

由區間 (a, b) 所分成的這些小區間 (x_{k-1}, x_k) $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的長度可以是任意的，一般說來，它們彼此可以不相等。這些分點 $x_k (0 \leqslant k \leqslant n)$ 的全體稱爲基本區間 (a, b) 的一個"分法"。

在任意一個小區間 (x_{k-1}, x_k) 上任取一點 ξ_k，當然，點 ξ_k 可以是在區間的內部，也可以與某一個端點重合 $(x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k)$；在點 ξ_k 上樹立起 OX 軸的垂線，讓它延長到與曲線 $y = f(x)$ 相交於點 M 爲止；顯然，點 M 的縱坐標就等於 $f(\xi_k)$ (圖 31)。通過點 M 作平行於 OX 軸的直線直到與直線 $x = x_{k-1}$ 和 $x = x_k$ 相遇爲止；圖 31 中帶斜線的長方形的底是 $x_k - x_{k-1}$，高是 $f(\xi_k)$，因而它的面積是 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$。

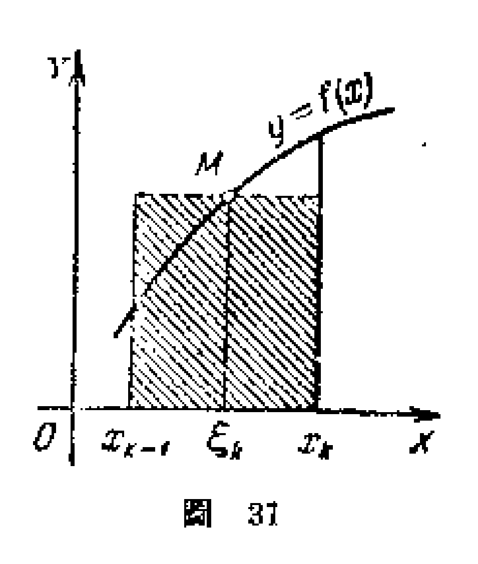


圖 31

如果我們對於每一個小區間 (x_{k-1}, x_k) $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 都像剛才講過的這樣做，而且每次也都完全隨便地在相應的區間上選擇點 ξ_k，於是一切這種帶斜線的長方形就組成一個由直線圍成的"階梯"形的圖形(多角形)。顯然，這個圖形的形狀與區間 (a, b) 的分法有關，同時與點 ξ_k 在一個分法中的各種不同取法也有關。但是，儘管這樣，看來還是很清楚，如果我們的分法是足够細密的話(圖 33)，則不論怎樣取點 ξ_k，帶斜線的圖形的面積與曲邊梯形的面積相差就可以任意地小。我們把帶斜線的圖形的面積記作 S^*。顯然，這個面積等於所有的長方形的面積之和：

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

如果我們把區間 (a, b) 分得越來越細，每次還是任意地取點 ξ_k，並且對於每個分法都計算帶斜線的階梯形的面積 S^*。我們的直覺使我們可以這樣期望，在這個過程中 S^* 將要趨向一個確定的極限，並且，

很自然地，這個極限就應該叫做曲邊梯形的面積 S。這樣來引進面積 S 的定義，除了直接由於幾何直覺而外，還由於以前在初等幾何裏的圓面積定義的啓發——在那裏，圓面積是定義作某些多角形的面積（當它們越來越接近圓時）的極限值。

因此，我們很自然地來引進下列定義：

$$S=\lim S^*=\lim\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}).$$

但是，到這裏定義還遠不能算是已經完全了。我們要問，究竟是在那一個過程中來實現上述的極限的？這個過程的數學描述又是怎樣的？我們知道（§ 13），產生任何極限的過程都是由某一個量的變動來描述的，這個量就是"基本"變量。那末，在這裏，這個量是怎樣的一個量，它的變化狀態又是怎樣的？

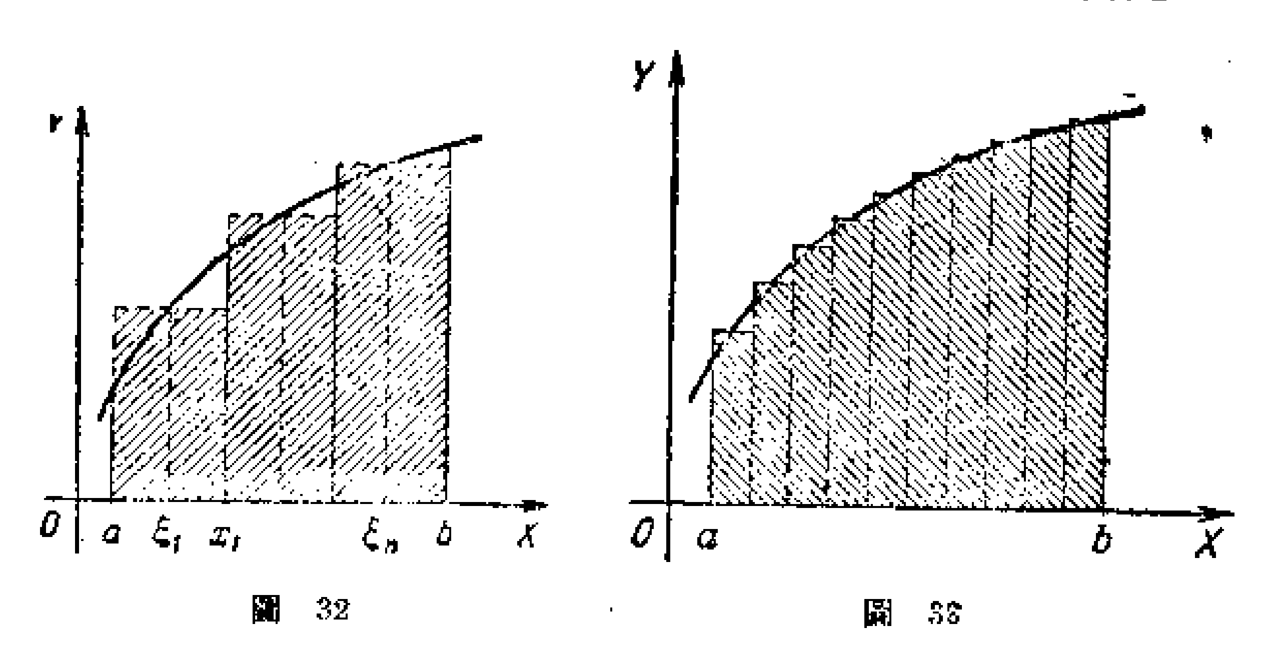


圖 32　　圖 33

在上面，我們把作爲極限基礎的過程說成是區間 (a, b) 的分法的無限制地變細。假定 T 是這種分法之一，令 $l(T)$ 代表區間 (x_{k-1}, x_k) $(1\leqslant k\leqslant n)$ 中最大的一個的長度（顯然，對於任一分法 T，$l(T)$ 是唯一確定的）。我們可以想像得到，當 $l(T)\to 0$ 時，也就是說，當最大的區間之長趨向於零時，分法 T 的確就"無限制地變細了"，因此，我們可以寫

$$S=\lim_{l(T)\to 0} S^*=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}). \qquad (1')$$

這就是說，我們可以取量 $l(T)$ 來作爲我們所考慮的過程的基本變量，並且用 $l(T)\to 0$ 來描述我們的過程。在這裏必須要注意，我們要求極限的量 S^* 並不是量 $l(T)$ 的函數，因爲，很明顯，對於同一個值 $l(T)$ 可以對應無窮多種不同的分法，還不要說，即使我們已經取定了分法 T，點 ξ_k 還可以有無窮多種不同的取法；而量 S^* 在實質上與所有這些任意的因素都有關係，因此對於已知的值 $l(T)$，它可以取無窮多個不同的值。

這樣一來，我們這裏所討論的，實際上是 § 15 中詳細考慮過的廣義的極限過程。我們感覺興趣的量 S^* 參與了"$l(T)\to 0$"所描述的極限過程，但是 S^* 並不是基本變量 $l(T)$ 的函數，因爲對於已知的值 $l(T)$，它取無窮多個不同的值。然而我們知道，這並不妨礙我們把極限 S 看作是在已知過程中由量 S^* 所確定的。關係式

$$\lim_{l(T)\to 0} S^*=S$$

在這裏具有下面這個完全精確的意義：對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$，都可以找到這樣一個 $\delta>0$，使得對於任意一個分法 T，只要 $l(T)<\delta$，就不管怎樣選取點 ξ_k，我們都有：

$$|S^*-S|<\varepsilon.$$

這個定義是非常自然的。事實上，如果對於不同的分法 T 或者點 ξ_k 的不同的取法，量 S^* 趨向於不同的極限值，那我們就很難解決，究竟該用那一個極限值來量度我們的曲邊梯形的面積。按定義我們必須認爲，在這種情形下，極限(1)不存在，因而我們就不能規定曲邊梯形有任何確定的面積了。

如果滿足了我們定義中的條件，我們就簡短地說，當分法無限變細時，$S^*\to S$。就這樣，我們引進了下述曲邊梯形的面積的定義：

如果和數 $S^*=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ **當分法無限變細時趨向於某一個極限，則這個極限就稱爲給定的曲邊梯形的面積。**

更形式一些，但跟前一個說法完全等價的說法是：

數 S **稱爲已知曲邊梯形的面積，是指：對於任意一個** $\varepsilon>0$ **都對應有這樣一個** $\delta>0$**，使得對於任意的分法** T**，只要** $l(T)<\delta$**，就不管怎樣選取點** ξ_k**，我們都有：**

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-S\right|<\varepsilon.$$

綜合上面所說的，我們的雙重任務的第一部分就完全解決了：我們已經建立了曲邊梯形面積的一般概念的定義。至於第二部分——提供計算這個面積的工具，在原則上也解決了，因爲公式(1)指出了計算這個面積的運算步驟。不過，在實際問題裏公式(1)所提供的方法是不能令人滿意的；還不要說，即使選定了一系列分法T，也取好了點ξ_k，要求這樣一個複雜的表達式的極限，也只有在一些最簡單的情形下才有可能成功；而我們尤其不能忘記的，是除此以外，在每一次我們還都應該證明，我們所找到的極限不依賴於所取定的這一系列分法以及點ξ_k的取法，而這在絕大多數的情形下都是極端困難極端煩瑣的。就由於這些原故，我們所指出的計算方法在絕大多數的具體問題中都不能直接應用。不過，指出下面這一點也是很有意思的：在我們還不知道解決這種問題的更有效的方法時，在某些情形下，也正是用這個方法曾經解決過個別的問題。例如，在古代希臘就已經用這個方法解決了當曲線 $y=f(x)$ 是拋物線（例如 $f(x)=ax^2$，a 是常量）時，求曲邊梯形面積的問題。

§ 45. 變力所作的功

假定某物體在一個平行於 OX **軸的力** P **的作用下沿直線** OX **運**

動，力 P 的方向與物體運動的方向一致。如果這個力是不變的，換句話說，它的量在直線 OX 的一切點 x 上都是一樣的，則力 P 與直線 OX 的某一段之長 s 的乘積

$$W = Ps$$

就稱爲力 P 在這一個線段上所作的功。

例如：一個物體在它的重量 P 作用之下從距地面高度爲 h 的位置落到地面，則重力（在地面的條件下我們可以算作物體在降落過程中重力保持不變）所作的功是 Ph。

現在我們假定，物體在力的作用下也是沿着直線 OX 運動，但這個力在運動路徑的不同的點上取不同的值。比方說，我們可以想像，就好像在直線 OX 的某一點處安放着一個源泉，它用力 P 來吸引或排斥我們的物體，而這個力 P 的大小依賴於物體與源泉的距離（大家都知道，像萬有引力，電與磁的引力和斥力等等，都是這樣）。於是力 $P = P(x)$ 就是物體在已知瞬間所在點的橫坐標 x 的函數。假定物體在這個變力作用之下從直線 OX 上的一點 a 移動到另一點 b。那麼，在這個移動之下，應該怎樣來求這個力 P 所作的功呢？

我們首先要注意，變力作功這個概念，到現在爲止我們還沒有定義過。因此，我們又處在這樣一個雙重任務的面前——給這個概念下一個一般形式的定義，同時還要提供出一個實際計算變力所作的功的方法。

先用分點

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

把區間 (a, b) 以任意的方式分成 n 部分，如我們在上節中所作的那樣，在每一個小區間 (x_{k-1}, x_k) $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 上任意取一點 ξ_k。在點 ξ_k 作用在物體上的力等於 $P(\xi_k)$。如果這個力在整個區間 (x_{k-1}, x_k) 上都等於這個值，則它在這個區間所作的功就等於

$$P(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{1}$$

但是,實際上這個力在區間 (x_{k-1}, x_k) 不同的點取不同的值,所以它在這個區間上所作的功 w_k 與上面所寫的這個乘積不一定相等。然而如果區間 (x_{k-1}, x_k) 很小,則我們有理由期望,力 $P(x)$ 在這個區間裏的變化是不大的,因而它在這個區間的不同的點上的值與它在點 ξ_k 上的值相差是很小的。如果是這樣的話,則我們可以很自然的認為,力 P 在小區間 (x_{k-1}, x_k) 上所作的功與常力 $P(\xi_k)$ 在同一區間所作的功相差很小。這個常力所作的功就是乘積(1),因而,我們可以認為

$$w_k \approx P(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{2}$$

上面這種考慮適用於區間 (a, b) 的所有的這些小區間,換句話說,(2)式對於任意的 k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 都成立。

其次,我們可以很自然地認為,力 P 在整個區間 (a, b) 上所作的功 W 等於它在所有這些小區間 (x_{k-1}, x_k) 上所作的功之和,換句話說,

$$W = \sum_{k=1}^{n} w_k.$$

因為我們假定,功 w_k 可以近似地表作乘積 $P(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,於是,很自然地,就得到:

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{3}$$

當然,如果近似等式(2)越精確,則所求的功的這個近似表達式也就越精確。而我們可以想像,區間 (x_{k-1}, x_k) 越小,也就是說,區間 (a, b) 的分法 T 越細,這些近似等式也就越精確。總之,我們應該承認,分法 T 越細則近似等式(3)就越精確。因此,如果我們把這個變力所作的功的精確值規定為和數

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

當分法無限變細時的極限的話，那是完全自然的事情。

這個和數的結構與 §44 中規定曲邊梯形時所用的那個和數的結構是絲毫不差的。在這裏所談到的極限過程與 §44 中的極限過程也完全一樣，因此，這裏只要逐字逐句地重覆那裏所說的就行了。跟那裏一樣，我們把下面這種寫法

$$W=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \tag{4}$$

了解為：對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$，都可以找到這樣一個 $\delta>0$，使得對於區間 (a, b) 的任意分法 T，只要不等式 $l(T)<\delta$ 成立，不管點 ξ_k $(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k,\ 1\leqslant k\leqslant n)$ 如何取法，我們都有：

$$\left|W-\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right|<\varepsilon.$$

如果上面這個條件滿足，我們就說 W 是變力 P 在區間 (a, b) 上所作的功。如果對於不同系列的分法與點 ξ_k 的不同的取法，和數

$$\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

有不同的極限，那末我們就寧願認為，變力 P 在區間 (a, b) 上所作的功不能夠有確定的意義。

我們再一次看到，我們的雙重任務的第一部分（變力所作的功的一般概念的定義）是完全解決了，同時，我們可以認為，第二部分（提供出實際計算這個功的方法）只是在原則上解決了：關於公式 (4) 不方便的地方，只要重覆我們在 §44 中所說過的相應的話就行了。

§ 46. 積分的一般概念

在 §44 與 45 兩節中，我們考慮了來自不同的知識領域的兩個問

題——一個來自幾何，另一個來自物理。很清楚，如果我們不談這兩個問題的具體內容，而只來注意它們的分析結構，那末它們簡直是完全一樣的。這兩個問題的解決，都要求我們計算某一個有確定結構的和數的極限。

在一系列幾何、物理、技術、其他的知識領域以及人們的實踐活動中會遇到大量的問題，它們的分析結構與我們剛才考慮過的問題的分析結構完全一樣；在以後我們還要屢次地遇到這類問題。因此，很清楚，這種類型的極限問題很值得我們作一般性的全面的研究；這是數學分析裏一個非常重要的問題。以下我們就來詳細地討論這個問題。

假定 $f(x)$ 是確定在區間 (a, b) 上的一個函數。又 T 是用分點

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

確定的區間 (a, b) 的一個分法，我們把小區間 (x_{k-1}, x_k) $(k=1,2,\cdots,n)$ 中最大的一個的長度記作 $l(T)$。然後我們在每一個區間 (x_{k-1}, x_k) 上任意取一點 ξ_k $(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k)$ 並且作和數

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1});$$

顯然，這個和數既依賴於我們所用的分法 T，又依賴於點 ξ_k 的取法。

如果對於無論怎樣小的正數 $\varepsilon>0$，都可以找到這樣一個 $\delta>0$，使得對於任意分法 T，只要 $l(T)<\delta$，就不管怎樣選取點 ξ_k，我們都有：

$$|S-I|<\varepsilon,$$

則我們說，和數 S 當分法 T 無限變細時（或者也就是說，當 $l(T)\to 0$ 時）趨向於極限 I。

這個事實也可以寫成下面的形式：

$$\lim_{l(T)\to 0} S=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=I.$$

數 I，如果它存在的話，顯然只依賴於函數 $f(x)$ 與區間 (a, b)。

我們稱它爲函數 $f(x)$ 從 a 到 b（或者在區間 (a, b) 上）的**積分**，並且把它記作

$$\int_a^b f(x)dx; \tag{1}$$

到現在爲止，無論是"積分"這個名詞或是 $\int$ 這個符號都不應該和術語"積分法"以及這同一個符號在前面的涵義相聯系；而在適當的時候我們才來建立它們之間的聯系。我們可以把符號(1)看成就是和數 S 的一個變形（這種看法，就歷史的觀點來說，可以認爲是正確的）。事實上，如果我們只想簡單地描述這個和數的構造，並不想過於詳細地談到區間的分法以及點 ξ_k 的取法，而僅僅把函數 f 與區間 (a, b) 記上，則我們可以把 S 寫成（暫時不管所用符號的嚴格意義）

$$S = \sum_a^b f(x)\Delta x,$$

其中 Δx 代表量 x 從一個分點到相鄰的下一個分點的改變量。其次，如果我們注意到 $\Delta x = dx$，並且不用希臘字母 Σ 來記求和的符號，而改用拉丁字母 $\mathscr{S}$，則我們就得到

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_a^b f(x)\,dx,$$

我們同意對這個表達式的極限還用同樣的符號來記它，只是略微加以變形；符號 $\int$ 就正是這樣從 $\mathscr{S}$ 變形而來的，而這也就是它的歷史來源。就是經過這樣一個過程，我們才得到符號：

$$I = \lim \mathscr{S} = \int_a^b f(x)dx.$$

我們把數 a 與 b 稱爲**積分限**（a 稱爲**下限**，b 稱爲**上限**），區間 (a, b) 稱爲**積分區間**；函數 $f(x)$ 稱爲**被積函數**，乘積 $f(x)dx$ 稱爲被

積表達式。

如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上有積分，我們就說它在這個區間上可積。不難看出，只有區間 (a, b) 上的有界函數才有可能是可積的。因爲事實上，如果函數 $f(x)$ 在 (a, b) 上是無界的，則對於任何一個分法 T，至少有一個區間 $(x_{k-1}, x_k)=\Delta_k$，函數在它上面還是無界的。比方說，如果 $f(x)$ 在 Δ_k 上可以取任意大的值，則我們可以在這個區間上取一點 ξ_k，使得 $f(\xi_k)$，因而也就使得和數

$$\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r-x_{r-1})$$

可以任意地大。這樣一來，當 $l(T)\to 0$ 時這個和就不可能趨向任何極限。

因此，函數在已知區間上的有界性是它在這個區間上的可積性的一個必要條件。然而這個條件並不是充分的。在 § 48 裏我們將要介紹可積性的一個非常方便的必要而且充分的條件。

我們當前的任務，是要找出一些計算積分的方法，使得我們可以計算足够廣泛的一類函數的積分。我們曾經在 § 44 與 45 中指出過，直接作爲和數的極限來計算積分實際上僅僅在最簡單的情形下才行。一般說來，由於這個計算法的複雜性，很難用它來解決問題。因此，我們應該找出另外一些實際可行的辦法來完成我們的任務。

§ 47. 大和與小和

在 § 46 中，我們把積分定義作和數

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k$$

的極限，因此，這樣形式的和數常常稱爲積分和。這樣一個和數的值，既依賴於區間 (a,b) 的分法 T，又依賴於區間 Δ_k 上的點 ξ_k 的取法。

爲了積分學更進一步的發展，我們還有必要來對於給定的分法 T 引進其他形式的和數。

假定 $f(x)$ 是確定在區間 (a, b) 上的一個有界函數，又假定 M 與 m 分別是函數 $f(x)$ 在這個區間上的上確界與下確界。假定 T 是區間 (a, b) 的一個由分點

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

確定的分法，小區間 (x_{k-1}, x_k) 以及它的長度都記作同一個符號 Δ_k。假定 M_k 與 m_k 分別是函數 $f(x)$ 在 Δ_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 上的上確界與下確界。我們來作和數

$$S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta_k,\quad s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta_k.$$

顯然，取定了分法 T 之後，這兩個和數就都唯一地確定了，而並不依賴於其他的任何因素。我們稱 $S(T)$ 爲對於分法 T 的大和，而 $s(T)$ 爲對應於分法 T 的小和。現在我們來熟悉一下這兩種和數的一些性質。

1°. 因爲不管怎樣在區間 Δ_k 上選取點 ξ_k，我們都有：$m_k\leqslant f(\xi_k)\leqslant M_k$，所以

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta_k\leqslant\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k\leqslant\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta_k=S(T),$$

這就是說，對於區間的一個給定的分法 T，任何一個積分和都介於相應的小和與大和之間。

2°. 假定 $\varepsilon>0$ 是一個任意小的數。根據上確界的定義，我們可以在每一個區間 Δ_k 上取一點 ξ_k，使得 $f(\xi_k)>M_k-\varepsilon$；因而

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k>\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta_k-\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta_k=S(T)-\varepsilon(b-a).$$

另一方面，根據 1° 我們知道，對於任意的積分和，不等式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k \leqslant S(T)$$

都成立。這兩個不等式表明，分法T的大和是對應於分法T的全部積分和的上確界。同理，分法T的小和是對應於分法T的全部積分和的下確界。

3°. 現在假定T與T'是區間(a, b)的任意兩個分法。假定Δ_k，M_k與m_k對於分法T仍舊代表前面所指的那些量，而Δ_l'，M_l'與m_l'是對應於分法T'的相應的量。最後，我們用Δ_{kl}來記區間Δ_k與Δ_l'的公共部分之長，並且令M_{kl}與m_{kl}分別代表函數$f(x)$在區間Δ_{kl}上的上確界與下確界（如果區間Δ_k與Δ_l'沒有公共內點，我們就有$\Delta_{kl}=0$；於是M_{kl}與m_{kl}可以取作任意的值，比方說，可以取作$M_{kl}=m_{kl}=0$）。

顯然，我們有：

$$\sum_{l} \Delta_{kl} = \Delta_k, \quad \sum_{k} \Delta_{kl} = \Delta_l',$$

$$m_k \leqslant m_{kl} \leqslant M_{kl} \leqslant M_k \qquad (l=1, 2, \cdots),$$

$$m_l' \leqslant m_{kl} \leqslant M_{kl} \leqslant M_l' \qquad (k=1, 2, \cdots),$$

從而

$$s(T) = \sum_{k} m_k\Delta_k = \sum_{k}\sum_{l} m_k\Delta_{kl} \leqslant \sum_{k}\sum_{l} m_{kl}\Delta_{kl} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k}\sum_{l} M_{kl}\Delta_{kl} \leqslant \sum_{k}\sum_{l} M_l'\Delta_{kl} =$$

$$= \sum_{l} M_l' \sum_{k}\Delta_{kl} = \sum_{l} M_l'\Delta_l' = S(T').$$

這就說明，任何一個分法T的小和都不超過另外任何一個分法T'的大和。

4°. 特別說來，由3°不難看出，所有的小和組成的集合有上界，假

定 I_0 是這個集合的上確界；同理，所有的大和組成的集合有下界，假定 I^0 是這個集合的下確界。因爲任何一個小和都不超過任何一個大和，所以它也不會超過大和的下確界；但是因爲 I^0 不小於任何的小和，所以 I^0 也不可能小於小和的上確界。因此，我們總有 $I_0 \leqslant I^0$，換句話說，小和的上確界不超過大和的下確界。

利用這裏所說的這些大和與小和的性質，我們在下一節裏就可以找出函數可積性的一系列的重要判別法來。

§ 48. 函數的可積性

我們仍舊沿用前兩節的一切符號。我們首先來證明函數在區間上的可積性的一個必要充分條件。

定理 1（可積性的準則）. 函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積的必要充分條件是：

$$\lim_{l(T)\to 0}[S(T)-s(T)]=0 \tag{1}$$

附註 1：關係式(1)意義也就是：對於無論怎樣小的 $\varepsilon>0$，都存在着這樣一個 $\delta>0$，使得對於區間 (a, b) 的任何分法 T，只要滿足不等式 $l(T)<\delta$，我們就有 $S(T)-s(T)<\varepsilon$。

附註 2：函數 $f(x)$ 在區間 Δ_k 上的上確界與下確界之差 $\omega_k=$ $=M_k-m_k$ 稱爲函數在區間 Δ_k 上的振幅。顯然，按 $S(T)$ 與 $s(T)$ 的定義，關係式 (1) 也可以改寫成

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta_k=0.$$

證明. 1. 必要性. 假定函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積；我們把它的積分記作 I。對於任何一個分法 T，只要 $l(T)$ 足够小，積分和 $\Sigma(T)$ 與 I 之差的絕對值就小於 ε，但因爲根據 § 47, 2°，$S(T)$ 與 $s(T)$ 分別是全部積分和 $\Sigma(T)$ 組成的集合的上確界與下確界，所以它們與 I 之

差的絕對値也都不超過 ε。因此，只要 $l(T)$ 足够小，就有

$$S(T)-s(T)\leqslant 2\varepsilon;$$

因爲 ε 可以任意地小，這就證明了關係式(1)。

2. **充分性**. 現在假定，對於確定在區間 (a, b) 上的函數 $f(x)$，關係式(1)成立。根據 § 47, 4°，對於任意的分法 T 都有

$$s(T)\leqslant I_0\leqslant I^0\leqslant S(T),$$

而只要 $l(T)$ 足够小時，差 $S(T)-s(T)$ 可以任意小，所以，$I_0=I^0$；把這兩個等量的公共値記作 I，於是對於任意一個分法 T，都有

$$s(T)\leqslant I\leqslant S(T),$$

但是根據 § 47, 1°，還有

$$s(T)\leqslant \Sigma(T)\leqslant S(T),$$

其中 $\Sigma(T)$ 是對應於分法 T 的任意一個積分和。由以上這兩個不等式我們就得到：

$$|\Sigma(T)-I|\leqslant S(T)-s(T),$$

其中 T 是區間 (a, b) 的任意一個分法，而 $\Sigma(T)$ 是對應於分法 T 的任意一個積分和。但是當 $l(T)$ 足够小時，根據(1)，差 $S(T)-s(T)$ 可以任意小；因而量 $|\Sigma(T)-I|$ 也就可以任意小，而這就是說，I 是函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上的積分。這樣，定理 1 就完全證明了。

定理 2. **如果有界函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積，則函數 $|f(x)|$ 在這個區間上也可積。**

證明. 把函數 $f(x)$ 與 $|f(x)|$ 在區間 Δ_k 上的振幅分別記作 ω_k 與 ω_k^*。不難看出，如果函數 $f(x)$ 在區間 Δ_k 上的確界 M_k 與 m_k 的符號相同，則

$$\omega_k^*=\omega_k=M_k-m_k.$$

如果 M_k 與 m_k 的符號相反，則

$$\omega_k^*<|M_k|+|m_k|=M_k-m_k=\omega_k.$$

所以，不論是那一種情形都有 $\omega_k^*\leqslant\omega_k$。因此，從

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta_k\to 0$$

就立刻推出

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k^*\Delta_k\to 0.$$

根據定理 1，定理 2 就證明了。

利用上面證明的可積性的準則（定理 1），我們很容易地就可以證明相當廣泛的一類函數的積分的存在。

定理 3. 在區間 (a, b) 上連續的函數在該區間上是可積的。

這個定理的極大的實際意義是很明顯的。例如，它表明，用連續曲線圍成的曲邊梯形（參看 § 44）永遠有確定的面積。

證明. 函數 $f(x)$ 既然在區間 (a, b) 上連續，根據 § 23 定理 5，它就在這個區間上一致連續。換句話說：對於任意的 $\varepsilon>0$，都可以找到這樣一個 $\delta>0$，使得只要 $x_2-x_1<\delta$ $(a\leqslant x_1<x_2\leqslant b)$，就永遠有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$。假定 T 是區間 (a, b) 的任意一個分法，滿足 $l(T)<\delta$。函數 $f(x)$ 既然是連續的，它在每一個區間 Δ_k 上必定取到最小值 $f(\xi_k')$ 與最大值 $f(\xi_k'')$（§23 定理 2）；顯然，$f(\xi_k')=m_k$，$f(\xi_k'')=M_k$，於是

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta_k=\sum_{k=1}^{n}[f(\xi_k'')-f(\xi_k')]\Delta_k;$$

但是 ξ_k' 與 ξ_k'' 是取自同一個區間 Δ_k 的，而 Δ_k 的長度又小於 δ；因此，$f(\xi_k'')-f(\xi_k')<\varepsilon$，於是我們得到：

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta_k<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta_k=\varepsilon(b-a),$$

只要 $l(T)<\delta$。這就表明，準則裏的條件是適合的，因而函數 $f(x)$ 在

区間(a, b)上是可积的。

定理 4. 区間(a, b)上的只有有限个間断点的有界函数$f(x)$，在这个区間上是可积的。

假定函数 $f(x)$ 在区間 (a, b) 上的間断点(按递增的順序)是：α_1, $\alpha_2, \cdots, \alpha_r$，又假定 ε 是一个任意的正数。把区間

$$(\alpha_i-\varepsilon, \alpha_i+\varepsilon) \qquad (1\leqslant i\leqslant r),$$

簡記作 d_i，并且假定 ε 是这样小，以致这些小区間彼此不相遇。在每一个区間$(\alpha_{i-1}+\varepsilon, \alpha_i-\varepsilon)$上，函数 $f(x)$都是連續的。(参看图 34，其中这

图　34

些区間都用鉛直的短綫标出来了)。因而，跟前一个定理的証明一样，对于每一个带短綫的区間，都可以找到这样一个正数 δ，使得在属于这个区間的任何一个长度小于 δ 的小区間上，函数 $f(x)$的振幅都小于 ε。当然，对于每一个带短綫的区間都有这样一个 δ，一般說来这些 δ 不一定完全相同；但由于这些区間的个数是有限的，所以在这些 δ 中一定有一个最小，我們仍旧把它記作 δ。因此，在任何一个长度小于 δ 的区間上，只要这个区間属于某一个带短綫的区間(不論是那一个)，函数$f(x)$的振幅都小于 ε。

現在假定 T 是区間(a, b)的任意一个分法，滿足 $l(T)<\delta$。把这个分法所分成的小区間 Δ_k 分成两类：

1) 第一类是那种整个包含在某一个带短綫的区間内的小区間，

2) 第二类則是那种与某一个区間 d_i 有公共点的小区間。

这样，我們就把和数

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta_k = \sum{}' + \sum{}''$$

分成了相應的兩部分，其中 $\sum'$ 是對應於所有的第一類小區間所作的和，而 $\sum''$ 是對應於所有的第二類小區間所作的和。因爲 $l(T)<\delta$，所以對於任何一個第一類的小區間 Δ_k 都有 $\omega_k<\varepsilon$，因而，

$$\sum{}' \omega_k \Delta_k < \varepsilon \sum{}' \Delta_k \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta_k = \varepsilon(b-a). \tag{2}$$

至於第二類小區間，它們當中那些與區間 d_i 有公共點的，共同組成一個區間，其長度小於 $2\varepsilon+2\delta$（因爲所有的這些小區間都在區間 $(\alpha_i-\varepsilon-\delta,\ \alpha_i+\varepsilon+\delta)$ 上）；又因爲區間 d_i 的個數是 r，所以所有的第二類小區間的長度之和不超過 $2r(\varepsilon+\delta)$；顯然，我們永遠可以取 $\delta<\varepsilon$，於是這個和就不超過 $4r\varepsilon$。最後，因爲函數 $f(x)$ 在任何小區間 Δ_k 上的振幅 $\omega_k=M_k-m_k$ 都不超過 $M-m$（即 $f(x)$ 在整個區間 $(a,\ b)$ 上的振幅），所以

$$\sum{}'' \omega_k \Delta_k \leqslant (M-m) \sum{}'' \Delta_k \leqslant 4(M-m)r\varepsilon. \tag{3}$$

根據(2)與(3)，我們就有：

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta_k < \varepsilon\{b-a+4(M-m)r\};$$

這裏只要分法 T 滿足唯一的條件 $l(T)<\delta$。由於 $\varepsilon>0$ 是任意的，而括號裏邊的數又是常數，所以準則裏的條件已經滿足了，因而函數 $f(x)$ 在區間 $(a,\ b)$ 上是可積的。

定理 5. 區間$(a,\ b)$上的單調有界函數 $f(x)$ 在該區間上是可積的。

這個定理並不能從前一個定理推出來，因爲一個區間上的單調有界函數可以在該區間上有無窮多個間斷點。例如，函數

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ \dfrac{1}{n} & \left(\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}\right) \ (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

就是一個例子，我們建議讀者自己會作出這個函數的圖形。這個函數在區間 (0, 1) 上是有界的，並且是不減的，但它有無窮多個間斷點 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$。

證明．假定 $f(x)$ 是區間 (a, b) 上的一個不減函數。於是，很明顯，對於區間 (a, b) 的任意分法 T，函數 $f(x)$ 在區間 $\Delta_k=(x_{k-1}, x_k)$ 上的上確界與下確界都總是

$$M_k=f(x_k),\ m_k=f(x_{k-1}),$$

從而

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta_k=\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}\Delta_k.$$

只要 $l(T)<\delta$，則這個和數裏的 $\Delta_k<\delta\ (1\leqslant k\leqslant n)$；又因為函數 $f(x)$ 是不減的，所以 $f(x_k)\geqslant f(x_{k-1})$，因而

$$\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}\Delta_k\leqslant\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}\delta\ \ (1\leqslant k\leqslant n),$$

這就表明

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta_k\leqslant\delta\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)-f(x_{k-1})\}=\delta\{f(b)-f(a)\}.$$

因為 δ 可以取得任意小，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta_k\to 0\quad[l(T)\to 0];$$

準則裏的條件滿足了，這就證明了定理 5。

作為有益的練習，我們建議讀者作 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第四章的習題 57, 61, 71, 73。

第十三章　積分與原函數之間的關係

§ 49. 積分的一些最簡單的性質

直到現在為止，我們一直是把積分學的兩個基本概念——原函數與積分——考慮作完全不相干的兩個概念的。本章的目的就是要來建立起它們相互之間的一個基本關係。為此，我們應該首先證明積分的若干最簡單的一般性質，本節中就來做這件事。

定理 1. 如果在區間 (a, b) 上 $f(x)=c$，其中 c 是一個常數，則

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a).$$

要證明這個定理我們只需注意，對於任意一個分法 T 並且不管點 ξ_k 如何取法，我們都有：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=c\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=c(b-a),$$

從而得到

$$I=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=c(b-a).$$

定理 2. 如果函數 $f(x)$ 與 $\varphi(x)$ 在區間 (a, b) 上可積，又 $f(x)\leqslant\leqslant\varphi(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$，則

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b \varphi(x)dx. \tag{1}$$

事實上，在定理所設的條件下，對於任何一個分法 T，不管點 ξ_k 如何取法，我們都有：

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\Delta_k;$$

由此讓 $l(T)\to 0$ 取極限，就得出不等式(1)。

從定理 1 與定理 2 立刻得出下列

推論. 如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積，又對於該區間上的任何點 x 都有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，其中 m 與 M 都是常數，則

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

定理 3. 如果函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 都在區間 (a, b) 上可積，則函數 $f_1(x) \pm f_2(x)$ 在該區間上也可積，並且，

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)dx. \qquad (2)$$

要證明這個定理我們只需注意，如果我們令 Σ_1，Σ_2 與 Σ 分別代表函數 f_1，f_2 與 $f_1 \pm f_2$ 的形如

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

的積分和，則對於任意的分法 T，顯然不管點 ξ_k 如何取法，我們都永遠有：

$$\Sigma = \Sigma_1 \pm \Sigma_2.$$

在這個等式中，讓 $l(T)\to 0$ 取極限，就立刻證明了函數 $f_1 \pm f_2$ 的可積性，同時也得到了等式(2)。

定理 4. 如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積，又 α 是任意一個常數，則函數 $\alpha f(x)$ 在區間 (a, b) 上也可積，並且，

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

("常數因子可以拿到積分符號外面來")。

要證明這個定理只需注意，對於區間 (a, b) 的任意一個分法，不管點 ξ_k 如何取法，都有

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

像上面一樣，通過極限手續我們就證明了函數 $\alpha f(x)$ 的可積性，同時也得到了等式(3)。

定理 5. 如果 $a \leqslant a' < b' \leqslant b$ (換句話說，如果區間 (a', b') 是 (a, b) 的一個部分區間)，則每一個在區間 (a, b) 上可積的函數在區間 (a', b') 上也必定是可積的。

證明. 假定函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積。根據 § 48 裏證明的準則，對於每一個 $\varepsilon > 0$，都可以找到這樣一個 $\delta > 0$，使得只要 $l(T) < \delta$，就一定有

$$\sum_{a}^{b} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta_k < \varepsilon, \tag{4}$$

這裏的和數是對於區間 (a, b) 以及它的分法 T 作成的。假定 T' 是區間 (a', b') 的任意一個分法，滿足 $l(T') < \delta$ 把區間 (a, a') 與 (b, b') 也分成若干個小區間，使每一個小區間的長度都小於 δ，於是我們就從 (a', b') 的分法 T' 得到了區間 (a, b) 的一個分法 T，而且這個分法滿足 $l(T) < \delta$。因此，根據(4)我們得到：

$$\sum_{a}^{b} < \varepsilon.$$

但是對於分法 T' 所作成的和 $\sum_{a'}^{b'}$ 是對於分法 T 所作成的和 $\sum_{a}^{b}$ 的一部

分，而且和 $\sum_{a}^{b}$ 中的每一項都不是負的。因此，只要 $l(T'')<\delta$，就有

$$\sum_{a'}^{b'} \leqslant \sum_{a}^{b} < \varepsilon;$$

由可積性的準則知道，這就是說 $f(x)$ 在區間 (a', b') 上可積。

定理 6. 假定 $a<c<b$；於是，只要函數 $f(x)$ 在區間 (a, c) 與 (c, b) 上可積，則它在區間 (a, b) 上就可積，並且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{5}$$

證明. 假定 T 是區間 (a, b) 的任意一個分法；把點 c 作為一個新分點添加到分法 T 的分點中去，我們就得到一個分法 T'。分別用 $\sum(T)$ 與 $\sum(T')$ 表示對於分法 T 與 T' 所作成的形如

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta_k$$

的和。顯然，從和 $\sum(T)$ 得到和 $\sum(T')$ 的過程，只是把 $\sum(T)$ 的某一項換成了 $\sum(T')$ 中新的兩項，其他各項完全不變；又因為當 $l(T)\to 0$ 時，兩個和的每一項都是無窮小量，所以

$$\sum(T)-\sum(T')\to 0 \quad [l(T)\to 0]. \tag{6}$$

但是，對於區間 (a, b) 所作成的和 $\sum(T')$ 顯然可以分解成對於區間 (a, c) 與 (c, b) 的兩個相似的和。由於函數 $f(x)$ 在區間 (a, c) 與 (c, b) 上的可積性，當 $l(T)\to 0$ 時，這兩個和都趨向於零。因而，當 $l(T)\to 0$ 時就有 $\sum(T')\to 0$。於是根據 (6)，當 $l(T)\to 0$ 時，也有 $\sum(T)\to 0$。這就表明，函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積。

現在我們只剩下要證明等式 (5)。由於函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上

的可積性已經證明了，要證明等式(5)也就不再是什麼難事了。事實上，當 $l(T)\to 0$ 時，不管我們怎樣選取區間 (a, b) 的分法 T 以及點 ξ_k，我們都有：

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\to\int_a^b f(x)\,dx=I; \qquad (7)$$

特別說來，我們可以這樣選取分法 T，使得點 c 永遠是一個分點。但是這樣一來和 S 就永遠可以分解成兩個對於區間 (a, c) 與 (c, b) 所作成的類似的和 S' 與 S''。根據定理的假設條件，當 $l(T)\to 0$ 時，這兩個和分別趨向於

$$\int_a^c f(x)\,dx=I' \quad 與 \quad \int_c^b f(x)\,dx=I''.$$

所以當 $l(T)\to 0$ 時

$$S=S'+S''\to I'+I''. \qquad (8)$$

從(7)與(8)就得到

$$I=I'+I'',$$

於是，定理 6 就完全證明了。

推論. 假定 $a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b$，又函數 $f(x)$ 在每一個區間 $(a, c_1), (c_1, c_2), \cdots, (c_n, b)$ 上都可積，則函數在整個區間 (a, b) 上也可積，並且，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{c_n}^b f(x)\,dx.$$

注意，函數 $f(x)$ 在每一個部分區間上可積性的假定，可以用它在整個區間 (a, b) 上可積性的假定來代替，因為根據定理 5，只要函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積，則它在區間 (a, b) 的每一個部分區間上也可積，因而推論仍舊成立。

關於積分的定義，我們還要作一個補充的說明，這個說明我們馬上就要用到。積分

$$\int_a^b f(x)dx, \tag{9}$$

（如果存在的話）根據定義，只與下列兩個要素有關：

1）函數 $f(x)$；

2）數 a 與 b；

如果這兩個要素都給定了，則積分也就唯一地確定了。因此，特別說來，積分（9）並不依賴於變量 x（這個量 x 通常稱爲"積分變量"）。因此，改變積分變量的記號並不會影響到積分的值；換句話說，表達式

$$\int_a^b f(x)dx,\quad \int_a^b f(y)dy,\quad \int_a^b f(\lambda)\,d\lambda$$

等等，都代表同一個積分。這個簡單而明顯的事實，跟以下這類事實是完全一樣的：例如說，表達式

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k},\quad \sum_{l=1}^{20}\frac{1}{l},\quad \sum_{\beta=1}^{20}\frac{1}{\beta}$$

等等，都代表同一個和

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}.$$

這裏的和與我們怎樣選擇"和的指標"完全無關，同樣的，我們的積分也與積分變量的選擇完全無關。

§ 50. 積分與原函數之間的關係

現在我們要來確立這樣一件事實，它被大家合理地認爲是微積分

學的基礎，因爲無論在歷史上或在邏輯上，它都是數學分析這兩個分支進一步發展的主要根據。

假定函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積，又假定 $a<x\leqslant b$。根據 § 49 定理 5，函數 $f(x)$ 在區間 (a, x) 上也可積。因此，函數 $f(x)$ 在區間 (a, x) 上的積分

$$\int_a^x f(x)dx$$

存在。不過，我們立刻看出來，以上這個積分的写法是很不方便的，因爲字母 x 在這個表達式中有兩種完全不同的意义：一方面它代表積分變量，另一方面它又代表積分的上限。因此，利用 § 49 末尾的補充說明，遇到這種情形，最好是把積分變量換成另外一個字母，比方說，我們總可以把函數 $f(x)$ 在區間 (a, x) 上的積分寫成

$$\int_a^x f(u)du.$$

如果我們現在把積分的下限 a 算作是固定的，讓上限 x 在區間 (a, b) 上任意變化，於是上述積分顯然就成爲 x 的一個函數，我們把這個函數記作 $F(x)$。我們現在來證明以下這個基本命題。

定理 1. 如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上可積，並且在該區間的某一內點 x 處連續，則函數

$$F(x)=\int_a^x f(u)du$$

在點 x 可微，並且 $F'(x)=f(x)$。

證明．假定 $a\leqslant x<b$ 又 $\Delta x>0$ 充分小，使得 $x+\Delta x\leqslant b$。於是根據 § 49 定理 6，

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(u)du-\int_a^x f(u)du=\int_x^{x+\Delta x} f(u)du\text{❶}. \tag{1}$$

因為根據定理的假設，函數 $f(u)$ 在點 x 連續，所以對于无論怎樣小的 $\varepsilon>0$，只要 Δx 充分小，而且 $x\leqslant u\leqslant x+\Delta x$ 時，我們永遠有：

$$f(x)-\varepsilon<f(u)<f(x)+\varepsilon,$$

因而，根據 § 49 定理 2，

$$\int_x^{x+\Delta x}[f(x)-\varepsilon]du\leqslant\int_x^{x+\Delta x} f(u)du\leqslant\int_x^{x+\Delta x}[f(x)+\varepsilon]du.$$

因此，關係式(1)給出：

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[f(x)-\varepsilon]du\leqslant\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\leqslant\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[f(x)+\varepsilon]du.$$

在上式的兩個積分中，被積函數都與積分變量 u 無關，所以它們都是常量。利用 § 49 定理 1，我們就得到：

$$f(x)-\varepsilon\leqslant\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\leqslant f(x)+\varepsilon;$$

因為當 Δx 充分小時，ε 可以任意小，所以這個不等式就證明了，

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x).$$

最後，我們同樣可以考慮 $\Delta x<0$ 的情形（讀者不難自己來論證一下），不難證明，當 $a<x\leqslant b$ 並且 $\Delta x\to-0$ 時，這個關係式仍舊成立，因而

---

❶ 為了要包括 $x=a$ 的情形，我們必須給予表達式 $F(a)=\int_a^a f(x)dx$ 以確定的意義。由於不難證明，當 $x\to a+0$ 時，$F(x)\to 0$，所以很自然地我們總是令 $F(a)=0$，在以後我們永遠假定已經這樣做了。

函數 $F(x)$ 在點 x 上可微，並且

$$F'(x)=f(x);$$

這就證明了定理 1。

附註. 顯然，我們得到的結果比定理 1 的論斷還要多一些。除去對於區間 (a, b) 的內點 x，有關係式 $F'(x)=f(x)$ 外，我們還證明了（令 $F(a)=0$）

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}=f(a), \quad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{F(b+\Delta x)-F(b)}{\Delta x}=f(b)$$

（當然，這裏要假定，函數 $f(x)$ 在點 a 與 b 都連續）。以後，我們把函數 $F(x)$ 叫做函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上的一個原函數，如果關係式 $F'(x)=f(x)$ 在區間 (a, b) 的每一個內點上都成立，並且在端點上適合上面的極限關係的話。很明顯，$F(x)$ 的這樣一個稱呼是很恰當的。這一點我們以後還要討論。

因爲一個在區間 (a, b) 上連續的函數 $f(x)$，永遠在該區間上可積，所以從定理 1 立刻可以推出。

定理 2. 如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上連續，則函數

$$F(x)=\int_a^x f(u)du$$

就是函數 $f(x)$ 在該區間上的一個原函數。

爲了充分地估計這個命題的全部意義，我們必須注意，由這個定理所肯定的連續函數的原函數一定存在這件事實，對我們來說還完全是新的。在第十一章裏我們只學會了求數量不多的一些初等函數的原函數；在這個狹小的範圍之外，原函數是否存在就始終是一個沒有解決的問題。

如果我們會求一個已知函數 $f(x)$ 在任意區間 (a, x) 上的積分，則根據定理 2 我們同時也就會求函數 $f(x)$ 的一個原函數；根據第十一

章的結果我們知道，在这种情形下，函数 $f(x)$的整个原函数族也就可以求出来了。因此，如果我們会求已知函数的积分，則我們也就可以立刻求出它的一切的原函数。但是，比这一点更重要得多的，是以上得到的結果使我們能够解决以下这个正好相反的問題：知道了連續函数 $f(x)$在区間(a, b)上的一个原函数，要求它在該区間上的积分。事实上，假定 $\Phi(x)$是連續函数 $f(x)$在区間(a, b)上的任何一个原函数。因为，根据定理 2，

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(u)\,du$$

也是它的一个原函数，于是根据第十一章的結果，差 $\Phi(x)-F(x)$一定是某一个常数 C，因此

$$\Phi(x)=F(x)+C. \tag{2}$$

在这个等式中令 $x=a$，由于 $F(a)=0$，我們得到 $C=\Phi(a)$。因此，在(2)中令 $x=b$，我們就得到：

$$F(b)=\int_{a}^{b} f(u)du=\Phi(b)-\Phi(a).$$

定理 3. 如果 $\Phi(x)$是連續函数 $f(x)$在区間(a, b)上的一个原函数，則

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{3}$$

因此，只要我們知道了連續函数 $f(x)$在区間(a, b)上的一个原函数，我們就可以立刻写出它在該区間上的积分。因此，在实际問題中应用范圍极广的积分的計算問題就完全轉化成求原函数的問題了。正是由于这一点，求原函数的問題在数学分析以及它的应用中才具有了非常重要的意义。这个問題在第十一章里已經討論得很多了，在第十六

與十七兩章裏我們還要更深入地來討論。

在歷史上，人們了解到利用原函數來計算積分的可能性的當時，是積分學發展上的一個轉折點。在此以前，積分的理論還是停留在計算每一個積分都必須尋求特殊的方法的情況下；但是，從此以後，人們就破天荒第一次可以用統一的方法來求很廣泛的一類函數的積分了。因此，我們可以毫不誇大地說，只是經過這個轉折點以後，積分學才成爲一門獨立的科學。

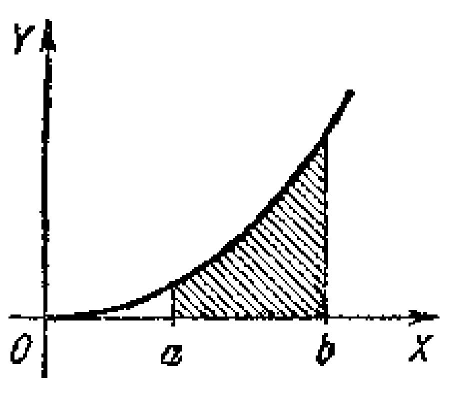


圖 35.

我們現在只舉出一個非常簡單的例子，來說明公式(3)的效能。假定圍成曲邊梯形(圖 35)的上邊的曲線是拋物線 $y=cx^2$ ($c>0$ 是一個常數)。我們前面已經說過，古代的希臘人(阿基米德)就已經會計算這種拋物線梯形的面積；但是他們的方法是建立在直接計算和的極限的基礎上的，因而計算起來非常複雜。我們現在可以利用公式(3)直接寫出現成的答案。要求的面積是

$$S=\int_a^b cx^2\,dx;$$

函數 cx^2 有一個原函數 $\frac{cx^3}{3}$，我們可以把它取來作爲公式(3)裏的函數 $\Phi(x)$；因此

$$S=\Phi(b)-\Phi(a)=\frac{c}{3}(b^3-a^3),$$

就這樣，立刻完全解決了我們所提出來的問題。

更多的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第四章，习題 1—4。

§ 51. 積分的其他性質

在 § 49 中我們已經證明了積分的一系列最簡單的性質。現在我們

任務是要把這個系列延續下去。在 § 49 中我們首先建立積分的那些性質，目的是根據它們我們可以很快地得出 § 50 中的聯系積分與原函數的公式 (3)。現在，正好相反，這個公式又使我們很容易地導出積分的一系列新的性質。

1. 直到現在爲止，在積分

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

中，我們總是假定 $a<b$；但是當 $a \geqslant b$ 時 § 50 中的公式(3)的右端也有完全確定的意義。因此，當 $a \geqslant b$ 時我們可以很自然地利用 § 50 的公式(3)來確定表達式(1)的定義，而這樣一來，表達式(1)對於任意的 a 與 b 就都有意義了。特別說來，對於任意的 a（與任意的連續函數 f）§ 50 的公式(3)都給出

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

並且，當 $a>b$ 時，

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)\,dx \tag{2}$$

(其中 $b<a$)。關係式(2)可以這樣來說：當調換積分的上下限時，積分就改變符號。

在所有這些討論中，我們都假定了函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上的連續性；但是，很自然地，當 $b<a$ 時，我們也可以更進一步把關係式 (2) 就算作是區間 (a, b) 上的任何一個可積函數 $f(x)$ 的積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的定義。在以後的討論中，我們總是採用這個定義。

我們還要注意，當 $b=a$ 時，§ 50 的公式(3)給出：

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

這個等式是在 § 50 中由我們令它成立的；現在我們看到，這完全與 § 50 的公式(3)一致。

§ 50 的公式 (3) 的右端是函數 $\Phi(x)$ 在 $x=b$ 與 $x=a$ 的函數值之差 $\Phi(b)-\Phi(a)$。我們常常把這個差記作：$\Phi(x)\Big|_a^b$，並且稱它為函數 $\Phi(x)$ 從 a 到 b 的“代換”。

因為在 § 50 的公式 (3) 中，原函數 $\Phi(x)$ 可以寫成 $\int f(x)dx$，所以這個公式可以改寫成下列含義全同的形式：

$$\int_a^b f(x)dx=\left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b. \qquad (3)$$

例 1.

$$\int_2^1 6x^2\,dx=(2x^3)\Big|_2^1=2-16=-14.$$

2. 原函數的分部積分法則是：

$$\int uv'dx=uv-\int vu'dx;$$

在等式兩邊做從 a 到 b 的代換，根據公式(3)我們就得到：

$$\int_a^b uv'dx=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vu'dx. \qquad (4)$$

這就是關於積分的**分部積分公式**。

例 2. 假定我們要計算積分

$$\int_1^e \ln x\,dx,$$

但是我們記不得函數 $\ln x$ 的原函數。只要令

$$u=\ln x,\quad u'=\frac{1}{x},$$

$$v'=1,\quad v=x,$$

利用公式(4)我們就得到：

$$\int_1^e \ln x\,dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx=e\ln e-1\ln 1-(e-1)=1.$$

更多的例子可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第四章，習題 15—17。

3. 換元積分法則是 § 43 的公式(7)：對於 $u=\varphi(x)$，

$$\int f(u)\,du=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx. \tag{5}$$

這個公式的左端是函數 $f(u)$ 的原函數 $F(u)$，其中 u 要用 $\varphi(x)$ 來代替，即 $F[\varphi(x)]$。因此，在公式(5)的兩端做從 a 到 b 的代換，我們就得到：

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]\Big|_a^b=$$

$$=F[\varphi(b)]-F[\varphi(a)]=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

因此，如果函數 $\varphi(x)$ 在區間 (a,b) 上有連續的導數，而函數 $f(u)$ 在區間 $[\varphi(a),\varphi(b)]$ 上連續，則

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

這就是積分的換元公式。

例 3.　令 $u=\varphi(x)=\cos x$，我們有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = -\int_{\cos 0}^{\cos\frac{\pi}{4}} \frac{du}{u} = (-\ln u)\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

4. **中值定理**．假定 M 與 m 分別是可積函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上的上確界與下確界。根據 §49 中定理 2 的推論，我們有:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

從而，

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M. \tag{6}$$

這個不等式對於區間 (a, b) 上的任意的可積函數 $f(x)$ 都成立。如果函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上連續，則根據 §23 的定理 3，它在該區間上必然取到它的最小値 m 與最大値 M 之間的任何値。但是不等式(6)表明，數

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

就是 m 與 M 之間的一個値，因而，在 a 與 b 之間可以找到一點 c，使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

或即

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a). \tag{7}$$

這個公式在實質上並沒有什麼新的內容；因爲如果用 $F(x)$ 表示函數

$f(x)$ 的某一個原函數，則公式 (7) 可以寫成

$$F(b)-F(a)=F'(c)(b-a);$$

而滿足這樣一個關係的點 c $(a<c<b)$ 的存在，是在區間 (a, b) 上把拉格朗日定理 (§ 36) 應用到函數 $F(x)$ 的一個簡單結果。不過我們前面這樣來導出公式(7)還是有它的意義的，因爲在那裏我們沒有利用積分與原函數的關係。

由公式(7)所表達的"中值定理"還可以加以推廣。假定函數 $\varphi(x)$ 在區間 (a, b) 上連續並且保持同一符號；爲了確定起見，我們假定它是非負的；於是對於 $a\leqslant x\leqslant b$

$$m\varphi(x)\leqslant f(x)\varphi(x)\leqslant M\varphi(x),$$

因而，根據 § 49 的定理 4 與定理 2

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\leqslant M\int_a^b \varphi(x)dx, \tag{8}$$

或即

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx}\leqslant M.$$

跟上面一樣，我們可以斷定，a 與 b 之間一定有這樣一點 c，使得

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx},$$

或即

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx. \tag{9}$$

定理(中值定理). 如果在區間(a, b)上函數$f(x)$與$\varphi(x)$連續,並且$\varphi(x)$永遠保持同一個符號,則在a與b之間一定可以找到一點c,使得關係式(9)成立。

不過,在很多實際應用中,與其說常用到這個定理,倒不如說常用到用來導出這個定理的不等式(8)。

附註. 在公式(9)的證明中,我們曾經把

$$\int_a^b \varphi(x)dx$$

當作除數使用了除法,因而我們假定了它不等於零。其實,即使函數$\varphi(x)$在區間(a, b)上恆等於零,關係式(9)也顯然還是對的(c可以任意取)。如果至少對於一點$\alpha(a\leqslant\alpha\leqslant b)\varphi(\alpha)>0$,則根據函數$\varphi(x)$的連續性,$\varphi(x)$必然在點$\alpha$的某一個鄰域$(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$的一切點都大於零(§23的引理)。如果$\mu>0$是函數$\varphi(x)$在區間$(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$上的最小值,則(根據§49的定理2)

$$\int_a^b \varphi(x)dx \geqslant \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)dx \geqslant \mu[(\alpha+\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)] = 2\mu\varepsilon > 0.$$

5. 在實際應用中,§49定理2的以下這個簡單推論常常很有用。很明顯,我們永遠有:

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

因此,根據§49定理2,只要函數$f(x)$在區間(a, b)上可積,我們就有[1],

---

[1] $|f(x)|$的可積性已經在§48(定理2)中證明了。

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

或即

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

積分的絕對值不超過被積函數絕對值的積分。

這個重要的不等式完全相當於初等代數中的下述不等式："和的絕對值不超過每一項的絕對值之和"。

第十四章 積分在幾何學與力學上的應用

§ 52. 平面曲線的弧長

和計算平面圖形面積的問題一樣，求曲線弧的長度的問題也是用積分學的方法來解決的最重要的幾何問題之一。這個問題的實際意義是這樣明顯，不需要我們再做解釋。在這裏，也跟計算面積的情形一樣，初等幾何僅僅對於一些特殊的曲線，像直線段以及圓弧，解決了我們所提出的問題。至於一般情形，只有在應用數學分析的方法以後，才能得到解決。當然，在邏輯上來說，我們在這裏又面臨到往常的處境：我們需要同時定義曲線弧長的一般概念，並且提供出弧長的實際的計算方法。

我們用下述方法來解決這個問題。這個方法比我們仿照初等幾何中計算圓面積的方法來計算曲邊梯形的面積時更進了一步，簡直就是在初等幾何裏用來計算圓周長與圓弧長的那個辦法。假定給定的曲線就是函數 $y=f(x)$ 的圖形（圖 36）。我們希望求出這個曲線上介於點 $M[a, f(a)]$ 與 $N[b, f(b)]$ 之間的弧 MN 的長度。跟這種類型的其他問題一樣，我們還是從區間 (a, b) 的任意一個分法 T 着手，用分點 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 把 (a, b) 分成若干小區間。在每一個分點，我

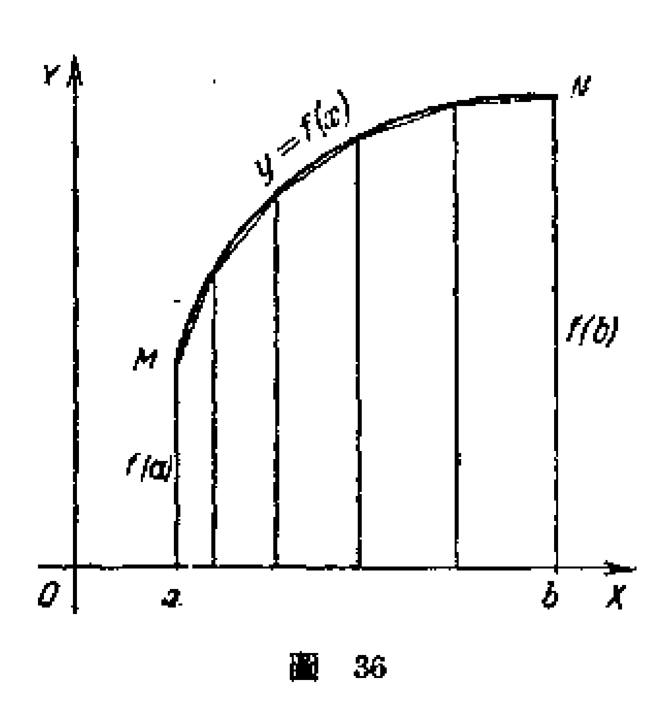


圖 36

們豎起垂直於 OX 軸的直線。把這些垂線延長到與曲線 $y=f(x)$ 相交爲止，於是，曲線弧 MN 就被分成了 n 個部分。我們把弧 MN 上每兩個相鄰的分點都用直線段連接起來。這些直線段（稱爲弦）的全體組成

了一個內接於弧 MN 的折線。當然，這個折線的長度是很容易計算的。

如果我們使分法 T 越來越細，那麼，所造成的折線顯然也就越來越逼近弧 MN。因而，很自然地，跟圓周的情形完全一樣，我們把弧 MN 的長度定義爲**這種折線當分法 T 無限變細時的極限**。當然，這就必須要求這個極限存在，並且這個極限還必須與這些分法 T 無關。這個定義就解決了我們的問題的第一部分。

我們所作的這種折線的長度，顯然由我們所選擇的分法 T 完全確定，因而很自然地可以把它記作 $L(T)$。如果我們把所要求的弧 MN 的長度記做 L，則根據定義就有：

$$L=\lim_{l(T)\to 0} L(T)$$

這裏，$l(T)$ 還是代表分法 T 的最大的小區間的長度。要想在這個定義的基礎上給出 L 的計算公式，我們首先應當求出折線長 $L(T)$ 的分析表達式。這倒沒有任何困難。因爲弧 MN 上兩個相隣的分點的坐標是 $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ 與 $[x_k, f(x_k)]$，所以折線上連接它們的那一段弦的長度是

$$\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2},$$

因而，

$$L(T)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2}.$$

現在假定函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上有連續的導數 $f'(x)$。於是，根據拉格朗日定理，我們就有

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \quad (1\leqslant k\leqslant n),$$

其中

$$x_{k-1}<\xi_k<x_k \quad (1\leqslant k\leqslant n).$$

因此，如果令 $x_k-x_{k-1}=\Delta_k \quad (1\leqslant k\leqslant n)$，就有

$$L(T)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta_k.$$

因爲,按假設,函數 $f'(x)$ 是連續的,所以函數

$$\sqrt{1+f'^2(x)}=\psi(x)$$

也是連續的,並且有

$$L(T)=\sum_{k=1}^{n}\psi(\xi_k)\Delta_k.$$

但是,如我們所知,當 $l(T)\to 0$ 時,這種和數總是以積分

$$\int_a^b \psi(x)\,dx=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

爲它的極限,並且極限的存在與所用的分法以及點 ξ_k 在區間 Δ_k 上的位置都無關。因此,我們就得到了:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{1}$$

它把計算弧 MN 的長度 L 歸結爲計算某一個積分,而這個積分的被積函數又是我們已經知道的。這就完全解決了我們所提出的問題。

例 1. 懸鏈線

$$y=\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};$$

具有圖 37 所示的形狀。要求這個曲線上介於 $x=0$ 與 $x=a$ 之間的弧長 L。我們知道

$$y'=\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$$

所以

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}=\operatorname{ch} x.$$

(因爲,用簡單的計算就可以證明,對任一個 x 都有 $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$)因此,一般公式(1)給出

$$L=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^a\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x\Big|_0^a=\operatorname{sh}a=\frac{e^a-e^{-a}}{2},$$

這解決了我們的問題。

到現在爲止，我們都假定了曲線是用 $y=f(x)$ 形式的方程給出的。從幾何上來說，這表示每一條平行於 OY 軸的直線與曲線上我們所考慮的部分 MN 至多交於一點。這個要求常常限制了我們。事實上，在有些時候，不論我們怎樣選擇坐標系也不可能實現這個要求——例如，求一條封閉曲線的長度時就是這樣。在這種情形，使用曲線的參變方程常常更方便一些；所謂曲線的參變方程是具有

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{2}$$

形式的兩個方程，其中當參變量 t 通過區間 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 時，點 (x, y) 就描出曲線上我們所要的那一部分。用參變方程表示的曲線可以有任意的形狀；例如，如果

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,$$
$$0\leqslant t\leqslant 2\pi\ (r>0),$$

則點 (x, y) 就描出整個的以 r 爲半徑的圓周

$$x^2+y^2=r^2.$$

圖 37

現在我們來求由參變方程 (2) 確定的曲線弧的長度 L 的表達式。爲此，我們用分點 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$ 使參變量的變化區間 (α, β) 得到一個分法 T。在折線上對應於這個分法的小區間 $\Delta_k=t_k-t_{k-1}$ 的那一段弦的長度顯然是

$$\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2}.$$

假定函數 $\varphi(t)$ 與 $\psi(t)$ 在區間 (α, β) 上都具有連續的導數，則根據拉格朗日定理，我們有

$$\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})=\varphi'(\tau_k)\Delta_k, \quad (t_{k-1}<\tau_k<t_k),$$

$$\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})=\psi'(\tau_k')\Delta_k, \quad (t_{k-1}<\tau_k'<t_k),$$

因此，對應於分法T的折線長是

$$L(T)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta_k.$$

如果在函數記號φ'^2與ψ'^2之下的τ_k，τ_k'是同一個值（例如，同是τ_k），則我們知道，當$l(T)\to 0$時❶，右端的和數就趨向於積分

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{3}$$

但是在實際上，τ_k'却不一定能等於τ_k，而這就給我們的極限手續多少帶來了一些困難，這個困難我們應該加以克服。為簡便起見，我們令：

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}=\rho_k, \qquad \sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k')}=\rho_k',$$

於是

$$L(T)=\sum_{k=1}^{n}\rho_k'\Delta_k=\sum_{k=1}^{n}\rho_k\Delta_k+\sum_{k=1}^{n}(\rho_k'-\rho_k)\Delta_k.$$

上面我們已經說過，當$l(T)\to 0$時，右端的第一個和數以積分(3)為極限。因此，要想證明這個積分同時也就是$L(T)$的極限，我們只要能證明，當$l(T)\to 0$時右端的第二個和數趨向於零就行了。下面我們就來證明這一點。

如果 $\varphi'(\tau_k)=0$，則 $\rho_k=|\psi'(\tau_k)|$，$\rho_k'=|\psi'(\tau_k')|$，就有：

$$|\rho_k'-\rho_k|\leqslant|\psi'(\tau_k')-\psi'(\tau_k)|.$$

如果 $\varphi'(\tau_k)\neq 0$，則有 $\rho_k>0$，$\rho_k'>0$，並且

$$\rho_k'^2-\rho_k^2=\psi'^2(\tau_k')-\psi'^2(\tau_k)=[\psi'(\tau_k')-\psi'(\tau_k)][\psi'(\tau_k')+\psi'(\tau_k)],$$

---

❶ 與通常一樣，$l(T)$表示分法T的最大的小區間之長。

因而

$$|\rho_k'-\rho_k|=\left|\frac{\psi'(\tau_k')+\psi'(\tau_k)}{\rho_k'+\rho_k}\right|\cdot|\psi'(\tau_k')-\psi'(\tau_k)|\leqslant|\psi'(\tau_k')-\psi'(\tau_k)|,$$

因爲,顯然有

$$\left|\frac{\psi'(\tau_k')+\psi'(\tau_k)}{\rho_k'+\rho_k}\right|<1.$$

因此,在任何情形下,我們都有:

$$|\rho_k'-\rho_k|\leqslant|\psi'(\tau_k')-\psi'(\tau_k)|$$

從而

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\rho_k'-\rho_k)\Delta_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\psi'(\tau_k')-\psi'(\tau_k)|\Delta_k. \tag{4}$$

但是,按照我們的假定,函數 $\psi'(t)$ 在區間 (α,β) 上連續,因而它在這個區間上也一致連續。因此,不論 $\varepsilon>0$ 怎樣小,我們總有

$$|\psi'(\tau_k')-\psi'(\tau_k)|<\varepsilon\quad(1\leqslant k\leqslant n), \tag{5}$$

只要 $l(T)$ 充分地小就行。但是,這樣一來,(4)與(5)就得到:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\rho_k'-\rho_k)\Delta_k\right|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta_k=\varepsilon(\beta-\alpha).$$

這就證明了,當 $l(T)\to 0$ 時,

$$\sum_{k=1}^{n}(\rho_k'-\rho_k)\Delta_k\to 0$$

因此,

$$L(T)\to L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

這樣一來,在參變表示的情形,與參變量的區間 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 相對應的曲線弧長就可以用積分(3)來計算。自然,如果特別 $t=x$, 這個積分就

化为我們已知的形式(1)。

例 2. 求旋輪綫(图 38)

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

在 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 那一段的弧長。

我們有(用一撇来表示对 t 进行微分):

$$x'=a(1-\cos t),\quad y'=a\sin t$$

于是
$$x'^2+y'^2=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=2a\sin\frac{t}{2};$$

因此,

$$L=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=2a\int_0^{\pi}2\sin u\,du=4a(-\cos u)\Big|_0^{\pi}=8a.$$

其他的练习可以参看 Б. П. 捷米多維奇的习題集，第四章，习題 209. 220。

如果我們用区間(α, t)来代替区間(α, β)，这里 t 从 α 变到 β，于是对应于区間(α, t)的曲綫弧長就是量 t 的一个函数

$$L=L(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\,du$$

(与通常一样，我們这里不再用 t，而用另外的字母，例如 u 来記积分变量)。由此得出:

$$L'(t)=\frac{dL}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

$$dL=\sqrt{dx^2+dy^2}. \tag{6}$$

在 $t=x$, $y=f(x)$的情形，相应地有:

$$L=L(x)=\int_0^x \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

$$L'(x)=\sqrt{1+f'^2(x)}=\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

由於公式(6)與參變量 t 的選擇無關，這就說明了弧長的微分等於一個直角三角形的弦，這個三角形以曲線上點坐標的微分作爲它的兩個直角邊。在 $t=x$ 的情形，從點

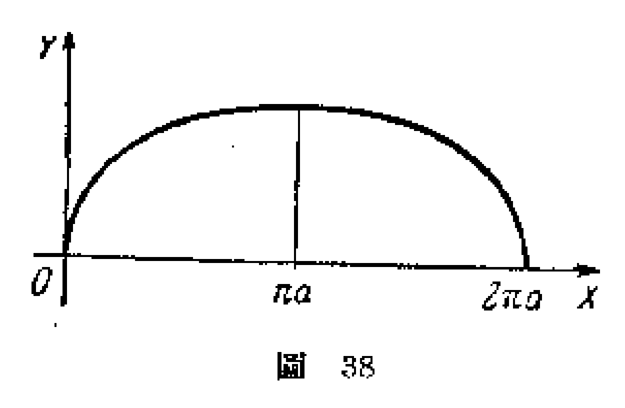


圖 38

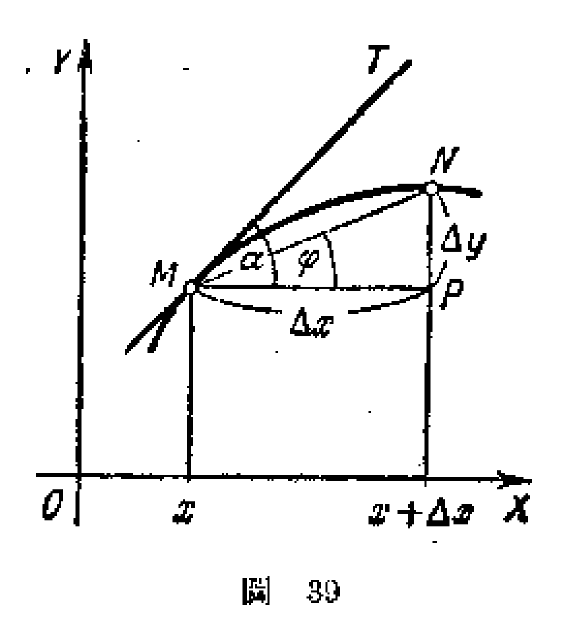


圖 39

$M(x, y)$ 引到點 $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$（圖 39）的曲線弧的微分，可以表作曲線在點 M 的切線被橫坐標分別爲 x 與 $x+\Delta x$ 的兩條平行於 OY 軸的直線截下的線段 MT。

如果一個曲線段可以表作方程(2)並且具有一個確定的長度，也就是說，在我們屢次提到的意義之下，極限

$$L=\lim_{l(T)\to 0} L(T)$$

存在，則我們就說這個曲線段是**可度長的**。根據前面的結果，顯然我們已經證明了，每一條可以用方程(2)來表達的曲線，只要 $\varphi(t)$ 與 $\psi(t)$ 都有連續的導數，就是可度長的。既然這樣的曲線是可度長的，則它在區間 (α, β) 的任一個部分區間 (α, t) 上的部分也就是可度長的，並且它的長度 $L(t)$ 是 t 的一個連續的遞增函數；因此，每一個 $L(t)$ 的值反過來都對應參變量 t 的一個確定的值，而根據方程(2)，這就對應了曲線上

的一個確定的點。這樣一來，t（因而 x 與 y）就都是量 $L(t)$的連續函數。對於這種曲線，我們可以在它上面選定一點爲起點，把曲線上從這個點到任意一點的弧長 λ 取來作參變量（這個參變量確定了點在曲線上的位置）。對於 λ 的每一個值曲線上都對應地有一個確定的點，而且曲線上的點的坐標 x 與 y 都是 λ 的連續函數：

$$x=f_1(\lambda),\quad y=f_2(\lambda);\tag{7}$$

這顯然也是曲線的一個參變方程，不過是一般形式(2)的一個特殊情形而已。由於參變量 λ 的簡明的幾何意義，在許多問題裏，公式(7)都顯得特別方便。例如，點坐標對於參變量 λ 的兩個導數

$$f_1'(\lambda)=\frac{dx}{d\lambda},\qquad f_2'(\lambda)=\frac{dy}{d\lambda}$$

這時就具有下述的簡明的幾何意義：根據關係式(6)（這裏應該令 $L=\lambda$）我們有：

$$\frac{dx}{d\lambda}=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \frac{dy}{d\lambda}=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

其中 $y'=\frac{dy}{dx}$。如果 α 是曲線在給定點的切線與 OX 軸的正方向間的夾角，則 $y'=\operatorname{tg}\alpha$，這就說明

$$\frac{dx}{d\lambda}=\cos\alpha,\qquad \frac{dy}{d\lambda}=\sin\alpha.$$

這些關係也可以直接從圖 39 看出來。

我們以上規定的曲線段的可度長性的定義，以及計算這個長度的公式(3)，都顯然與原來的方程(2)中參變量 t 的選擇有關。可以對這些概念給出純粹的幾何的定義，這個定義與曲線的不論什麼樣的分析表示都無關。另一方面，當某些先決條件成立時，不管曲線(2)的可度長性也好，它的長度也好，都可以證明與參變量 t 的選擇沒有關係。不過，在我們的課程內不可能對這些說得很詳細了。

上面我們已經看到，每一個在(α,β)上由方程(2)表達的曲線都是

可度長的。只要函數 $\varphi(t)$ 與 $\psi(t)$ 在 (α, β) 上有連續的導數。在應用上，我們常常會遇到這種情形，給定的連續曲線本身沒有這種表達式，而只是在把區間 (α, β) 分成有限個部分區間後，在每一個小區間上才有這種表達式(例如像多角形)。今後，我們同意說這種曲線在 (α, β) 上是光滑的❶。

不難證明，每一條光滑的曲線都是可度長的。要證明這一點，爲簡單起見，我們不妨假定曲線只有一個“奇異”點，(顯然，一般情形並不增加新的困難)，並且假定這個“奇異”點所對應的參變量 t 的值是 τ。於是給定的曲線在區間 (α, τ) 與 (τ, β) 上都是可度長的；假定曲線在這兩部分的長度分別是 L_1 與 L_2。假定 T 是 (α, β) 的任意一個分法，又 T' 是在分法 T 的分點內添上 τ 作爲一個新分點所得到的那個分法。於是，對應於分法 T' 的折線 Λ' 就總是由對應於部分區間 (α, τ) 與 (τ, β) 的分法的折線 Λ_1' 與 Λ_2' 組成的；因爲在這些部分區間上，曲線是可度長的，所以，當分法無限變細時，折線 Λ_1' 與 Λ_2' 的長度分別趨向於 L_1 與 L_2，而這就是說，折線 Λ' 的長度趨向於 L_1+L_2。但是，對應於分法 T 的折線 Λ 的長度，不同於折線 Λ' 的長度的地方僅僅在於 Λ' 有兩個任意小的線段被換成了 Λ 的一個線段，而這個線段的長度又不超過那兩個線段的長度之和，換句話說，它也是可以任意小的。因此，當分法充分變細時，折線 Λ 的長度與折線 Λ' 的長度之差可以任意地小，因而它也同樣地可以任意接近於 L_1+L_2。但是，這就是說，給定的曲線在 (α, β) 上是可度長的，並且，它的長度就等於 L_1+L_2。

跟沿着一個直線段一樣，沿着一條可度長的(特別是光滑的)曲線可以進行積分。假設給定的可度長的曲線是由方程(7)表達的，這裏方

---

❶ 這種情形，顯然等於說，在給定的區間 (α, β) 上，曲線可以用方程(2)來表達，其中 $\varphi(t)$ 與 $\psi(t)$ 到處都連續，同時，除去有限個點以外，$\varphi'(t)$ 與 $\psi'(t)$ 也都存在並且到處連續；而在每一個這種例外的點(稱爲“奇異”點)，函數 $\varphi(t)$ (同樣，$\psi(t)$) 也有左導數與右導數，不過這兩個導數具有不同的值。

程(7)中的函數 f_1 與 f_2 都假定是連續的。取曲線的兩個端點之一當做曲線弧的起點，以 L 表示這段曲線的長度，於是參變量 λ 的變化範圍就是從 0 到 L。用分點

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=L$$

把區間 $(0, L)$ 分爲 n 個小區間，並且用 l_k 來記區間 $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，$l_k$ 同時也用來代表這個區間的長度。

現在假定 $F(x, y)$ 是一個二元函數，確定在我們所考慮的曲線段上。在每一個小區間 l_k 上任意取一點 λ_k^* $(\lambda_{k-1}\leqslant\lambda_k^*\leqslant\lambda_k)$，並且令 $x_k=f_1(\lambda_k^*)$，$y_k=f_2(\lambda_k^*)$，於是 (x_k, y_k) 是曲線上對應於 λ 的變化區間 l_k 的那一段弧上的一個點。作和數

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k) l_k=\sum_{k=1}^{n} F[f_1(\lambda_k^*), f_2(\lambda_k^*)] l_k.$$

如果函數 $F[f_1(\lambda), f_2(\lambda)]$ 在區間 $(0, L)$ 上是可積的❶，則當所取的分法無限變細時，上式右端的和數就以積分

$$\int_0^L F[f_1(\lambda), f_2(\lambda)]\, d\lambda$$

爲極限。用 C 來記整個給定的曲線段，這個積分常常寫成

$$\int_C F(x, y)\, d\lambda$$

並且稱爲函數 $F(x, y)$ 沿曲線 C 所取的積分。

在應用上常常會遇到沿光滑曲線所取的積分。我們在 § 54 中就要討論的，關於平面上的物質曲線的某些力學性質的問題，就可以提供出這方面的簡單的典型的例子。

---

❶ 這是常常會有的，特別是如果 $F(x, y)$ 在給定的曲線上到處都連續(參看後面的 § 88)，則 $F[f_1(\lambda), f_2(\lambda)]$ 就是區間 $(0, L)$ 上的 λ 的連續函數。

§ 53. 空間曲線的弧長

空間曲線弧長的度量問題與我們在前面所講的平面曲線的情形是這樣相像，以致於我們只需要把它的基本定義與主要結果列舉出來就行了。

1°. 如果給定的曲線段 AB 可以用方程

$$y=f_1(x),\ z=f_2(x)\ \ (a\leqslant x\leqslant b)$$

表達，並且如果函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 在區間 (a, b) 上具有連續的導數，則 AB 弧的長度就一定存在並且等於

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+f_1'^2(x)+f_2'^2(x)}\,dx. \qquad (1)$$

2°. 在更一般的情形，如果給定的曲線段 AB 可以用參變方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \qquad (2)$$

表達，其中 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 與 $\chi(t)$ 都在區間 (α, β) 上具有連續導數，AB 弧就一定有一個確定的長度，並且等於

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt. \qquad (3)$$

3°. 在條件 2° 之下，用 $L(t)$ 表示在曲線 AB 上對應於參變量 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 的區間 (α, t) 的那一段弧長，則有

$$L'(t)=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)},$$

以及

$$dL=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

特別，在條件 1° 下

$$L'(x)=\sqrt{1+y'^2+z'^2}=\sqrt{1+f_1'^2(x)+f_2'^2(x)}.$$

4°. 曲線(2)如果在 AB 這一段上具有確定的長度，我們就說它在

這一段上是可度長的。如果連續曲線的一段 AB 可以分成有限個部分，在每一部分上，曲線都滿足條件 2°，我們就說曲線在這一段上是光滑的。每一條光滑的曲線都是可度長的。

5°. 可度長的曲線可以用方程

$$x=\varphi(\lambda),\ y=\psi(\lambda),\ z=\chi(\lambda) \tag{4}$$

來表達，其中 λ 是曲線上從某一個取定的起點到點 (x,y,z) 的弧長。這時

$$\frac{dx}{d\lambda}=\varphi'(\lambda)=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{d\lambda}=\psi'(\lambda)=\cos\beta,\quad \frac{dz}{d\lambda}=\chi'(\lambda)=\cos\gamma,$$

其中 α,β,γ 是坐標軸的正方向與曲線在點 (x,y,z) 的切線之間的夾角，切線的方向算作是引向 λ 增加的方向的。

6°. 如果可度長曲線表作方程(4)，又函數 $F(x,y,z)$ 在曲線的一段 $C(\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2)$ 上是連續的，則積分 $\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}F[\varphi(\lambda),\psi(\lambda),\chi(\lambda)]\,d\lambda$ 稱為"函數 $F(x,y,z)$ 沿曲線 C 所取的積分"，並且記作

$$\int\limits_C F(x,y,z)\,d\lambda.$$

§ 54. 平面物質曲線的質量，重心與轉動慣量

1. 假設給定了一段光滑的平面曲線 C，我們把這段曲線的方程寫做

$$x=\varphi(\lambda),\ y=\psi(\lambda), \tag{1}$$

其中 λ 是從這一段曲線的起點算起的弧長，因此當點 (x,y) 通過曲線 C 時，λ 就從 0 增加到一個數 L，L 表示整個這段曲線的長度。為方便起見，我們把對應於參變量的值 λ 的點 (x,y) 叫做"點 λ"。

我們假定有某種物質分佈在這段曲線上("物質曲線")。假定 $M(\lambda)$ 表示曲線上介於點 0 與 λ 之間所分佈的物質的質量，並且假定函數

$M(\lambda)$ 在區間 $(0, L)$ 上具有連續導數 $M'(\lambda)=\rho(\lambda)$。在 §27 討論過的直線段的情形告訴我們，把這 $\rho(\lambda)$ 叫做這段曲線在點 λ 的物質密度是恰當的。因為，無須做任何更動，那一節中的一切論證對現在的一般情形都是一樣有效的（只要如我們所假定的，曲線是光滑的）。在那裏，我們之所以不得不限制在直線段的情形是因為在當時我們還不知道曲線弧長的一般概念。

總之，我們現在就把量 $\rho(\lambda)$ 稱為給定的曲線在點 λ 的物質密度。因為 $\rho(\lambda)=M'(\lambda)$，所以，反過來

$$M(\lambda)=\int_0^\lambda \rho(u)\,du.$$

（積分的下限應該這樣選擇，使得 $M(0)=0$）。如果我們想要確定曲線的一段 (λ_1, λ_2) 的質量

$$M(\lambda_1, \lambda_2) \quad (0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant L),$$

那就有

$$M(\lambda_1, \lambda_2)=M(\lambda_2)-M(\lambda_1)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho(u)\,du=\int_C \rho(x, y)\,d\lambda. \quad (2)$$

這個公式通過在各個點給定的物質密度 $\rho(\lambda)$ 表達出任何一段光滑的物質曲線的質量。

2. 如果我們有一組 n 個分佈在同一平面上的質點，它們的質量分別是 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，又它們的坐標分別是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，則大家都知道，這樣一個質點組的重心的坐標就是

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}, \quad \bar{y}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}, \quad (3)$$

或者，用 $M=\sum_{k=1}^{n} m_k$ 表示整個質點組的質量，就是

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

現在，我們假定物質不是集中於個別的點，而是沿着光滑曲線 (1) 的 $(0, L)$ 這一段上連續地分佈着的。我們提出這樣一個要求，對於這樣的質點組要給予它的重心一個恰當的定義，並且提供出一個方法來計算這樣規定的重心的坐標。

用分點

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=L \tag{T}$$

把區間 $(0, L)$ 分成任意多個小區間（小段），並且，爲簡單起見，令 $\lambda_k-\lambda_{k-1}=\Delta_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$。假定曲線在點 λ 的物質密度等於 $\rho(\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant L)$；跟上面一樣，我們假定函數 $\rho(\lambda)$ 在這個區間上是連續的。按照公式 (2)，小段 Δ_k 的質量等於

$$m_k=\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\rho(\lambda)\,d\lambda;$$

因而根據中値定理 (§ 51)，我們有

$$m_k=\rho(\lambda_k^*)\,\Delta_k.$$

這裏，λ_k^* 是小段 Δ_k 上的某一點。如果小段 Δ_k 很小，則我們可以把它近似地想像成一個具有質量 m_k 的質點，並且不妨設想這個質點就位於曲線上點 λ_k^* 那個地方。這樣一來，小段 Δ_k 就爲一個質點所代替；而如果我們對分法 T 的每一小段都作這樣的代替，則整個物質曲線就近似地爲一個質點組所代替，這個質點組由 n 個質點組成，而且它們的質量與坐標分別等於

$$m_k=\rho(\lambda_k^*)\Delta_k,\quad x_k=\varphi(\lambda_k^*),\quad y_k=\psi(\lambda_k^*)\quad(1\leqslant k\leqslant n);$$

根據公式(3)，這個質點組的重心坐標是

$$\bar{x}(T)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\lambda_k^*)\varphi(\lambda_k^*)\Delta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\lambda_k^*)\Delta_k},\quad \bar{y}(T)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\lambda_k^*)\psi(\lambda_k^*)\Delta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\lambda_k^*)\Delta_k}.$$

在分法 T 無限變細的情况下，我們所設想的這個由有限個質點作成的質點組愈來愈近似我們的物質曲線。因此，很自然地我們可以設想物質曲線的重心坐標就分別等於數 $\bar{x}(T)$ 與 $\bar{y}(T)$ 當分法 T 無限變細時的極限。這顯然就給出：

$$\bar{x}=\frac{\int_0^L \rho(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda}{\int_0^L \rho(\lambda)d\lambda}=\frac{\int_C x\rho(x,y)d\lambda}{\int_C \rho(x,y)d\lambda},$$

$$\bar{y}=\frac{\int_0^L \rho(\lambda)\psi(\lambda)d\lambda}{\int_0^L \rho(\lambda)d\lambda}=\frac{\int_C y\rho(x,y)d\lambda}{\int_C \rho(x,y)d\lambda},\tag{4}$$

或者，把整個曲線的質量表作

$$M=\int_0^L \rho(\lambda)d\lambda,$$

就有：

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_0^L \rho(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y)d\lambda,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_0^L \rho(\lambda)\psi(\lambda)d\lambda=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y)d\lambda.$$

如果在我們的曲線上物質的分佈是均勻狀態的，也就是說，沿整個曲線 $\rho(\lambda)=\rho$ 是一個常數，則公式(4)就給出

$$\bar{x}=\frac{1}{L}\int_0^L \varphi(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{L}\int_C x\,d\lambda,\quad \bar{y}=\frac{1}{L}\int_0^L \psi(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{L}\int_C y\,d\lambda. \quad (5)$$

3. 現在我們再回到由 n 個質點組成的力學系統。假定 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是這些點的質量，而 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是它們與某一個軸（或者與某一個固定的點）的距離。和數

$$K=\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$$

稱爲這個點組對於給定的軸(或給定的點)的轉動慣量。如果我們的質點組是在一個平面上，並且具有直角坐標 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$，則這個點組對於 OX 軸，OY 軸以及坐標原點 O 的轉動慣量顯然分別等於

$$K_x=\sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, \quad K_y=\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2, \quad K_0=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2+y_k^2).$$

現在，讓我們用上面所考慮過的物質曲線(1)來代替質點組。仍舊沿用我們上面用來確定物質線的重心坐標的那一切記號以及推理方法，完全相仿地，我們很容易確定物質曲線(1)對於 OX 軸，OY 軸以及點 O 的轉動慣量：

$$K_x=\int_0^L \rho(\lambda)\psi^2(\lambda)\,d\lambda=\int_C y^2\rho(x, y)\,d\lambda, \quad (6)$$

$$K_y=\int_0^L \rho(\lambda)\varphi^2(\lambda)\,d\lambda=\int_C x^2\rho(x, y)\,d\lambda,$$

$$K_o = \int_0^L \rho(\lambda)[\varphi^2(\lambda)+\psi^2(\lambda)]d\lambda = \int_C (x^2+y^2)\rho(x,y)\,d\lambda.$$

例　求物質均勻分佈的半圓周 $x^2+y^2=a^2(y\geqslant 0)$ 的重心，以及這個半圓周對於連接它的兩個端點的直徑的轉動慣量。由於對稱性，顯然，$\bar{x}=0$；因而我們只須求出 $\bar{y}$ 與 K_x。令 λ 表示從半圓周的一個端點算起的弧長，我們可以把曲線的方程寫作

$$x=a\cos\frac{\lambda}{a},\qquad y=a\sin\frac{\lambda}{a}\qquad (0\leqslant\lambda\leqslant\pi a).$$

公式(5)就給出

$$\bar{y}=\frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi a} a\sin\frac{\lambda}{a}\,d\lambda=\frac{2}{\pi}a.$$

同時，公式(6)給出

$$K_x=\int_0^{\pi a}\rho a^2\sin^2\frac{\lambda}{a}\,d\lambda=\frac{\pi}{2}\rho a^3.$$

§ 55. 幾何立體的體積

立體體積的計算通常需要比我們目前已經掌握到的還要更加複雜的分析方法。以後在第二十七章中，我們還要全面地來討論這個問題。不過，對我們現在要提出的大多數問題來說，簡單的積分就已經足以把它們解決徹底，現在我們就來考慮一下這一類的問題。

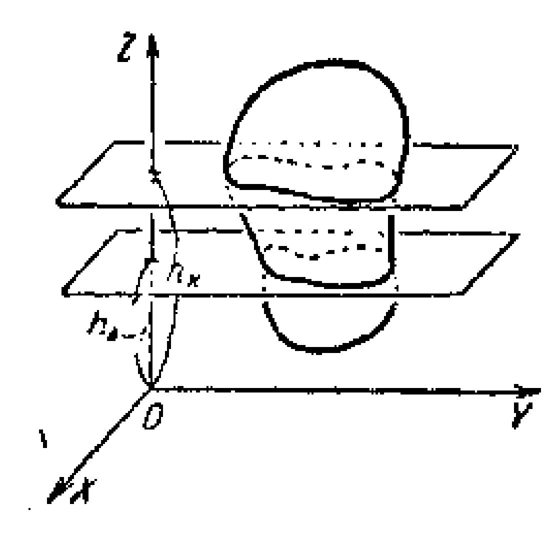


圖 40

假定我們想計算圖 40 所示的立體的體積。在空間內任取一個直角坐標系 $OXYZ$，並且我們同意把一個點的 z 坐標稱為它（在平面 XOY 之上）的"高

度"。一般來說，平面 $z=h$（這裏，h 是任意一個給定的實數）與給定的立體相截成某一個平面圖形。我們算作對於任意的 h，這個截面的面積都是已知的（或者，無論如何我們總能够計算它）。一般說來，對於不同的 h，這個面積自然是不同的；所以它是 h 的一個函數，我們把它記作 $s(h)$。我們現在要討論的一類特殊問題的特徵是這樣：假定已知函數 $s(h)$（在高度 h 的地方，立體的截面的面積），希望利用它來表達給定的立體的體積 V。

首先，假定給定的立體是一個直線柱體；換句話說，它所有的水平截面在 XOY 平面上的投影都是同一個圖形（圖 41）。如果這個圖形是圓，那麼我們的立體就是一個直線圓柱體，我們在初等幾何裏已經學過，它的體積就等於底面積與高的乘積。我們很自然地把這條法則搬用到一般情形，那就是，柱體的底可以具有任意的形狀❶。

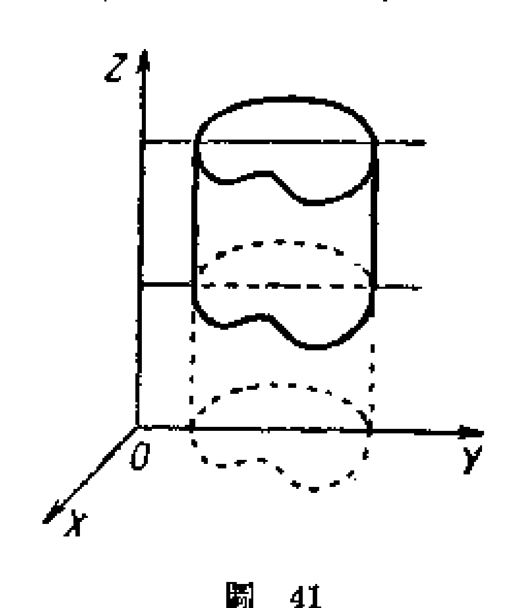


圖 41

就這樣，我們算作每一個直線柱體的體積等於這個柱體的底面積與它的高的乘積❷。

現在我們來考慮一般情形（圖 40）。假定立體的最低點具有高度 a，最高點具有高度 b。任意地，用分點

$$a=h_0<h_1<h_2<\cdots<h_n=b \qquad (T)$$

把區間 (a, b) 分成小段，並且在每一小段 (h_{k-1}, h_k) 上任取一點 z_k，使得

$$h_{k-1}\leqslant z_k\leqslant h_k \qquad (1\leqslant k\leqslant n).$$

平面族 $z=h_k$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 把立體分成了許多平"台"，第

---

❶ 當然，從邏輯上來看，我們就會發現：除了在初等幾何裏所考慮過的有限幾種情形外，立體體積的概念直到現在還沒有定義，而我們的第一個任務就在於，要給它一個恰當的一般的定義。

❷ 做這個假定就跟我們以前在解決相應的問題，像關於等速運動的速度，常力作功等所做的假定完全一樣。

k 個這種平"台"的厚度等於 $\Delta_k = h_k - h_{k-1}$。如果 Δ_k 很小，這個平台的體積就可以算作差不多等於一個直線柱體的體積。這個柱體的高是 Δ_k，它的底可以算作這個平台的任意一個水平截面，例如高度為 z_k 的那個截面。由於這個截面的面積等於 $s(z_k)$，所以這種直線柱體的體積等於 $s(z_k)\Delta_k$；因此，我們可以認為差不多

$$v_k \approx s(z_k)\Delta_k,$$

因而

$$V = \sum_{k=1}^{n} v_k \approx \sum_{k=1}^{n} s(z_k)\Delta_k;$$

當然，這個近似等式當分法 T 越細時，就越更顯得準確；因此，跟以前一樣，按照定義，我們令

$$V = \lim_{l(x)\to 0} \sum_{k=1}^{n} s(z_k)\Delta_k.$$

當然，這就要求所寫的這個極限存在，並且這個極限既不與分法有關，也不與從每一小段上 z_k 的取法有關。但是，大家知道，如果函數 $s(h)$ 在區間 (a, b) 上連續，這一定是對的；因此，在這種情形下，就有

$$V = \int_a^b s(h)\,dh. \tag{1}$$

這個公式解決了我們所提出的問題，它一方面確定了已知截面面積的立體體積的一般概念，同時，它又提供了一個非常確定的方法來計算這個體積。

例 1. 假定給定了一個以面積等於 S 的一個任意多角形為底高為 H 的角錐。在初等幾何裏我們已經學過，這個角錐在高度為 h 的截面是一個與底相似的多角形，它的面積與它到角錐的頂點的距離的平方成正比，也就是說，與 $(H-h)^2$ 成正比。

因此，對我們的問題來說，就有：

$$s(h)=k(H-h)^2,$$

其中，k 是一個常數，它不難由條件 $s(0)=S$ 來確定：

$$S=kH^2,\quad k=\frac{S}{H^2},$$

因此，

$$s(h)=\frac{S}{H^2}(H-h)^2=S\left(1-\frac{h}{H}\right)^2.$$

根據公式(1)我們的角錐的體積就是

$$V=S\int_0^H\left(1-\frac{h}{H}\right)^2dh.$$

用 $1-\frac{h}{H}=u$ 變換積分變量就得出：

$$V=S\int_0^1 u^2H\,du=\frac{SH}{3}.$$

這樣，我們就看到了用積分學的方法來得到這個知名的公式是多麼簡單，而在初等幾何裏推出這個公式時則不知道複雜了多少。如果不是以多角形爲底，而是以任意一個面積爲 S 的平面圖形爲底，所有上面所說的一切，無論是推理或者是結論都仍然是成立的。特別，對於以半徑爲 R 的圓爲底，以 H 爲高的圓錐，我們就得到下列著名的公式

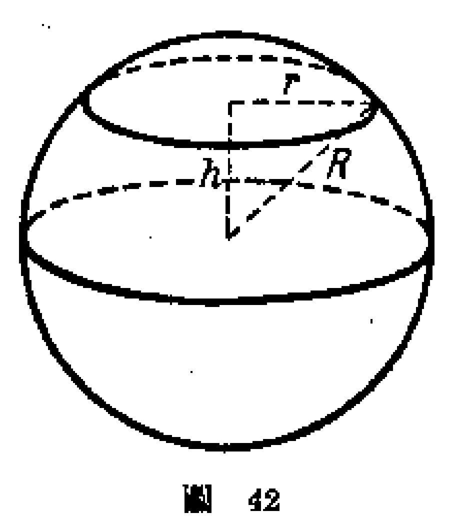


圖 42

$$V=\frac{\pi R^2H}{3}.$$

例 2. 假定給定了一個以 R 爲半徑的球，它的截面的高度 h 是從赤道平面算起的距離（圖 42）。從圖上顯然可以看出，在高度爲 h 的截面的半徑 r 等於

$$r=\sqrt{R^2-h^2},$$

因此，截面的面積

$$s(h)=\pi r^2=\pi(R^2-h^2),$$

因而，對於球的體積，公式(1)給出

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-h^2)\,dh=\pi R^2\int_{-R}^{R}dh-\pi\int_{-R}^{R}h^2dh=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

例 3. 假定一段曲線 $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ 繞 OX 軸旋轉❶；求由此得出的"旋轉體"（圖 43）的體積 V。顯然，這個立體的一切垂直於 OX 軸的截面都是圓。而且，用平面 $x=h$ $(a\leqslant h\leqslant b)$ 截出的圓以 $f(h)$ 爲半徑，當然，這就說明，它的面積是 $\pi[f(h)]^2$。因此，公式(1)給出：

$$V=\pi\int_a^b[f(h)]^2\,dh.$$

以下，在例 3 的同樣條件下，我們更進一步來討論如何計算這個旋轉體的側面積的問題。當然，這裏我們應該注意到，直到現在我們還沒有曲面面積的一般概念的定義，因此，我們應該首先給出它的定義（至少是對於旋轉體的定義）。爲了這個目的，我們從 (a, b) 區間的通常的分法 T 着手，它的分點是

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

對應於這個分法，給定的曲線段就被點 $[x_k, f(x_k)]$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ 分成了 n 個部分。我們用弦把每一對相鄰的分點 $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$ 連接起來，這個弦長等於

$$l_k=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2}.$$

由這些弦組成的折線繞 OX 軸旋轉得到一個曲面，這個曲面的面積 S^* 顯然可以看作是我們要求的曲面面積 S 的一個近似值。而且從直覺上看來，分法 T 愈細，S^* 就愈逼近 S；因此，跟往常一樣，我們可以令：

$$S=\lim_{l(T)\to 0}S^*,$$

❶ 爲簡單起見，我們假定 $f(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。

然後再來找 S 的分析表達式。

為此，我們注意，弦 l_k 繞 OX 軸旋轉指出一個截圓錐體（圖 44），

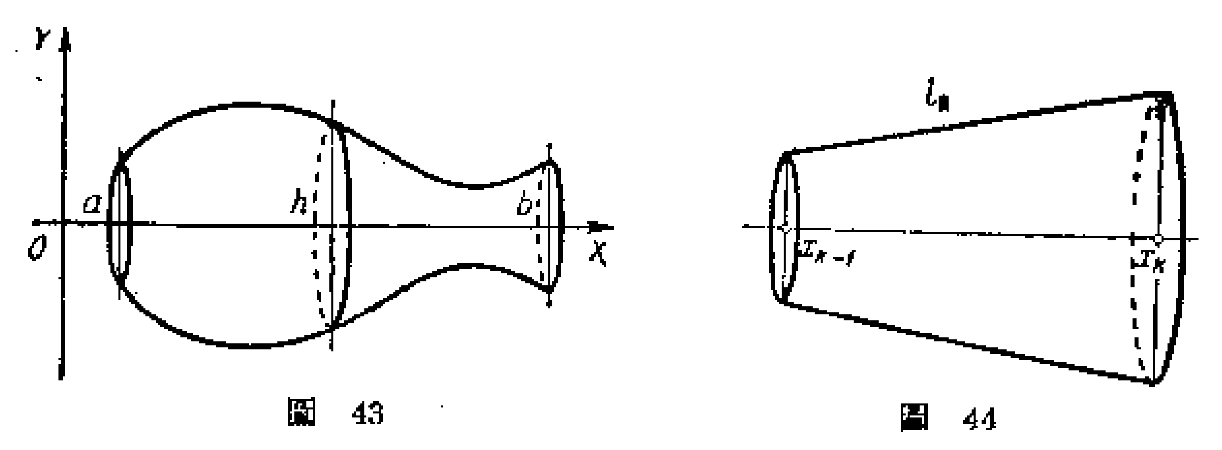


圖 43　　圖 44

它的母線的長度等於 l_k，而底半徑則是 $f(x_{k-1})$ 與 $f(x_k)$。這樣一個截圓錐體的側面積等於

$$S_k=\pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\,l_k.$$

現在假定函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 上具有連續的導數。於是，根據拉格朗日定理，

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1}),$$

其中，$x_{k-1}<\xi_k<x_k$；因此，如果為簡便起見，像通常一樣令 $x_k-x_{k-1}=$ $=\Delta_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，我們就得到

$$l_k=\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta_k,$$

於是

$$S_k=\pi[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta_k;$$

從而

$$S^*=\sum_{k=1}^{n}S_k=\pi\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+f(x_k)]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta_k=$$

$$=2\pi\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta_k+$$

$$+\pi\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+f(x_k)-2f(\xi_k)]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta_k.$$

當 $l(T)\to 0$ 時，根據我們關於函數 $f'(x)$ 的連續性所作的假定，右端的第一個和數趨向於極限

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

所以，如果我們能夠證明，當 $l(T)\to 0$，時，右端的第二個和數趨向於零，則 S^* 的極限就存在，並且有：

$$S=\lim_{l(T)\to 0} S^*=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

但是，由於函數 $f(x)$ 的一致連續性，無論 $\varepsilon>0$ 多麼小，對於充分細的分法 T 我們有

$$|f(x_{k-1})+f(x_k)-2f(\xi_k)|<\varepsilon\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

於是，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+f(x_k)-2f(\xi_k)]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta_k\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta_k=\varepsilon\sum_{k=1}^{n}l_k\leqslant\varepsilon L,$$

其中 L 是所給的曲線段的長度。這樣顯然就證明了我們所要證明的一切。

爲簡單起見，令 $f(x)=y$，我們可以把以上得到的旋轉體的側面積寫成

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

關於 § 55 的習題，可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第四章，習題 183—185，192，195，199，200，228。

第十五章　積分的近似計算法

§ 56. 問題的提出

現在我們已經看到，許多在應用上很重要的具體問題的解決，最後都要歸結到積分的計算。因此，我們有必要來比較深入地看一看所謂"求出"或者"計算"積分究竟是什麽意思。只要被積函數與積分限都完全給定了，積分就有了完全確定的數值，所以，我們的問題就在於如何來求出這個數值。如果積分的值是一個能夠直接用數學上常用的記號（例如$\frac{5}{7}$，$\sqrt{2}$，$\frac{\pi^2}{4}$，$\sin(0.5)$，等等）表達出來的數，則所謂求出這個積分自然就是要把它表成這些記號。但是，絕大多數的實數並沒有這種代表它們的簡單記號，因此，我們就應該充分地估計到也許我們的積分的值就正好是這樣的一個數。對於這種數，我們只能夠寫出它的近似值，比如說，寫成十進位小數到若干位有效數字爲止。於是，很明顯，就一般情形來說，所謂積分的計算問題就只能夠瞭解作在某種準確程度的範圍內的近似計算問題。如果我們能夠找到這樣一個方法，它能夠把積分表成十進位小數一直到預期的無論多少位有效數字，那麽我們就可以認爲我們的問題在原則上是解決了，因爲，就一般情形來說，我們並不能把積分的"計算"瞭解成什麽別的東西；况且，就是在積分的值能夠用上面所說的記號"準確地"表達出來的時候，這樣一種表達通常也就是告訴我們某種確定的方法來做積分的近似計算。例如，如果我們求出的積分值是$\frac{\pi^2}{4}$，事實上這就使我們有可能（比如說，用幾何上著名的π的近似計算法）來求出積分的有任意多位有效數字的十進小數表示。

其實，使我們能夠以任意精確程度來近似地計算給定的積分的這種方法，在積分概念的定義中，就已經給出來了。我們本來就是把積

分規定作某種形式的和數在某種確定的過程（積分區間的分法無限變細）中的極限的。只要把基本區間分得充分細，對應的和數，就可以是積分的具有任何預期精確度的近似值。因此，在原則上，積分的定義本身已經提供了一個極爲詳盡的計算積分的方法。不過，雖然是這樣，我們仍然在過去不斷地找出，並且今後也還要繼續尋找其他的方法來計算積分，這是因爲實際上在大多數情況下，直接從定義出發的方法在技術上複雜而困難，因而往往不適於應用。

我們已經說過，利用積分概念與原函數概念來計算積分的方法是最強有力的方法，數學科學在這方面的差不多所有的實際成就都應當歸功於這個方法。而且我們也舉出過一系列的例子，在這些例子中，用這個方法輕而易舉地就解決了積分計算的問題。只要我們在區間(a, b)上能够求出$f(x)$的一個原函數$F(x)$，我們立刻就得出：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

因此，在這種情形計算積分的問題就轉化成計算某個已知函數的兩個值的問題。但是，說函數$F(x)$是"已知"的，又是什麼意思呢？在一般情形下，這種已知性除去能够給我們一個求出函數的任意精確程度的近似值的辦法而外，也就沒有別的什麼了。在很多場合，正像我們已經看到過的，這個方法應用起來簡單而且方便，因而(1)式就圓滿地解決了我們的問題。但是要獲得這種圓滿的結果，需要一些什麼呢？我們知道（§ 50），任何一個連續函數都具有原函數。因此，在原則上公式(1)可以用來計算任何一個連續函數的積分。但是僅僅只有原函數$F(x)$的存在，還不能使我們達到目的：我們還必需要求，這個函數是我們已知的，也就是說，我們要能够求出它的任何準確程度的近似值；此外，在實際上我們還必需要求這個求近似值的方法是簡單而且方便的，——因爲否則它對於實際計算仍旧是无济于事。譬如說，如果函數

$F(x)$ 屬於"初等"函數之列，那就沒有問題了；因爲對於一切初等函數來說，計算它們的近似値的方法是已經研究成功了的。

但是，除去這不多的一些情形（很幸運地是，相當廣泛的一類在應用上很常見的函數，是屬於這些情形的），事情都不是這樣順利。如果說在微分初等函數的時候，我們總是仍舊得到初等函數，那麼，在積分的時候，我們就遇見完全不同的情形：初等函數的原函數雖然總是存在的（因爲所有初等函數在基本上是連續的），但是一般說來，却不再是初等函數。可以舉出隨便多少個簡單的初等函數，它們的原函數不再是初等函數：例如，函數 $1/\ln x$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ 以及很多其他的函數；很廣的一類這樣的函數曾經由 П. Л. 車貝謝夫發現，我們在後面還要談到。作爲一個例子，現在我們設想要來計算積分

$$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x} = F(3) - F(2), \tag{2}$$

其中 $F(x)$ 是 $1/\ln x$ 的原函數。爲此，我們就必須計算 $F(3)$ 與 $F(2)$。但是如果我們不僅不知道函數 $F(x)$ 的任何適於計算的表達式，而且尤其不知道是否有可能通過初等函數來明白地表達出 $F(x)$，試問我們又怎麼樣能够來計算我們的積分呢？這就很淸楚了，對於積分的計算來說，公式(2)並沒有給我們任何東西，因爲關於函數 $F(x)$ 我們就僅僅知道它是 $1/\ln x$ 的原函數（顯然是存在的）而已，因此，除去直接地或者間接地利用積分的定義本身，我們沒有別的法子來解決我們的問題。

從以上所說的，我們倒可以看出另外一點來，即函數的積分可以作爲我們用來定義以及研究新的非初等函數的有效工具。每當函數 $f(x)$ 不以初等函數爲它的原函數，則原函數

$$\int_a^x f(u)du = F(x) \tag{3}$$

本身就是一个新的非初等函数，对于这个函数的性质的研究以及它的值的計算，我們在一开始，就只知道它是由关系式(3)确定的，也就是說，只知道它是 $f(x)$ 的原函数，除此而外，我們就什么也不知道了。用这种办法所定义的一系列的函数，在科学的发展过程中起着巨大的作用。它們的許多性质都被精密地研究过，并且对其中的許多函数都造了表，就象对数表以及三角函数表一样。特别，我們刚才所考虑的函数

$$\int_{2}^{x}\frac{du}{\ln u}$$

的情况就正是这样，它通常記作 $\mathrm{Li}(x)$ 并且称为"积分对数"。

現在我們回到积分的近似計算的問題，我們已經看到它决不是永远可以用原函数的方法来解决的，因而在这方面寻找其他的在应用上尽可能方便的方法就具有很大的意义。这种方法可以分做两大类：第一类是从积分的原始定义(作为和数的极限)出发，尽可能地加以改进，使得在实际計算上做起来很方便；在这一章，我們要討論这类方法中比較簡单的几个方法(有时叫做"机械求积法")。第二类中是另外一些方法，这些方法的基本精神是把被积函数近似地换成另外的函数，而这个函数的原函数是初等函数，并且同时也近似于給定函数的原函数。这种方法要求使用更复杂的数学分析的工具，我們在以后(第四篇)再来討論。

§ 57. 梯形法

所謂"梯形法"是一个簡单的积分近似計算法，它的主要精神如图45所示，在图中我們有意地把积分区間 (a, b) 的分法 T 画得很稀疏。按照我們通常所用的記号，带有斜綫的"阶梯"图形的面积显然等于"小和"

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k,$$

同時,大和

$$S(T)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta_k$$

就等於帶斜線的圖形再加上在它上面的那些虛線長方形所合成的那個大的"階梯"圖形的面積。當然,在區間(a, b)的分法是如此稀疏的情形之下,這兩個和數中的任何一個都與代表曲線梯形面積的積分

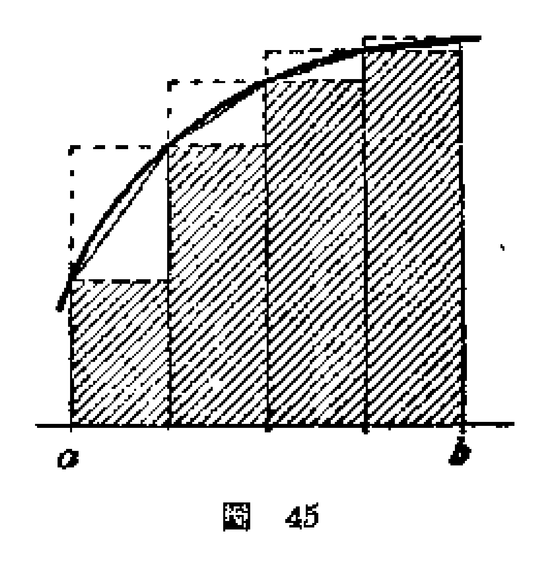


圖 45

$$\int_a^b f(x)dx$$

(我們近似計算的對像)有着顯著的差別。

現在,把給定的曲線段的每兩個相鄰的分點用直線段(稱作弦)連接起來,並且考慮以這些弦所組成的折線做爲上面的界限,以直線$x=a$與$x=b$做爲側邊,以OX軸爲底的圖形S的面積。我們直接看出,即使在我們的分法T是如此稀疏的情形之下,S的面積就已經很接近於我們所要估計的曲邊梯形的面積了——無論如何,它比那兩個"階梯"圖形的任何一個都要更加接近得多。因此,在實際計算上,取S來作爲積分的近似值要比用大和或小和有利得多,何况S的計算並不比大和數或小和數的計算來得複雜。當然,我們應該注意到,圖45僅僅帶有圖例說明的性質而不是一個證明,這是因爲它只表現了函數$f(x)$總是時時凸向一方的情形,不過我們從它觀察得到的用量S代替大和數與小和數來計算積分的近似值的好處,在絕大多數的其他情况下,仍然是不錯的。

跟通常一樣,我們用x_k與Δ_k分別表示分法T的分點與小區間,並且爲簡單起見,令

$$f(x_k)=y_k,\quad (k=0, 1, \cdots, n).$$

為了簡單起見，我們假定 $f(x)\geqslant 0\ (a\leqslant x\leqslant b)$。$S$ 的面積是一些以不同的線段 Δ_k 為底的直角梯形的面積之和（這也就是"梯形法"的名稱的由來）；以線段 Δ_k 為底的梯形的高度是 Δ_k，底邊長是 y_{k-1} 與 y_k $(k=1, 2, \cdots, n)$；因此它的面積等於

$$\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\Delta_k,$$

因而

$$S=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{k-1}+y_k)\Delta_k.$$

要想得到一定精確程度的近似值，我們當然應該相應地把分法 T 取得充分細密（使 $l(T)$ 充分小）；但是在另一方面分點 x_k 的選擇仍然可以是任意的，因而我們總可以利用這個任意性來儘可能地簡化我們所要做的計算。因為我們的公式中需要計算函數 $f(x)$ 在所有各分點的值，所以我們應該首先看一看，對於什麼樣的點計算函數 $f(x)$ 的值特別簡單；譬如在某些情況下可能就是對於有理點或者與 π 可以通約的點等等。如果的確有這樣的點，那麼自然最好是把這些點選作分點。如果函數 $f(x)$ 沒有這種特別有好處的點，那麼當然最簡單地就是把區間 (a, b) 分成 n 等份；於是

$$\Delta_k=\frac{b-a}{n}\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

因而我們得到：

$$S=\frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}(y_{k-1}+y_k)=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right). \tag{1}$$

這就是給定的積分的近似值。不難看出，即使在一般的情形對 $f(x)$ 的符號不作任何假定時，公式(1)仍然是正確的。當然，為了考究這個公式所給出的近似值的好壞，我們還應該學會估計由此得出的誤差。我們下面就來看應該怎麼樣來做到這一點。

假定在某一個區間 $(\alpha,\beta)(\beta-\alpha=\Delta>0)$ 上，我們把曲線 $y=f(x)$ 換成連接它的兩個端點的弦 $l(x)$，於是 $l(\alpha)=f(\alpha)$，$l(\beta)=f(\beta)$。我們設法來估計以下兩個積分之差：

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta} l(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx-\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Delta.$$

爲了這個目的，我們令

$$g(x)=\frac{f(x)-l(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}\quad(\alpha<x<\beta)$$

並且考慮函數

$$\varphi(z)=f(z)-l(z)-g(x)(z-\alpha)(z-\beta),$$

其中 x（因而 $g(x)$）看作是一個常數（$\alpha<x<\beta$）。顯然 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$；但是由於 $g(x)$ 的定義，容易看出也有 $\varphi(x)=0$。因此，函數 $\varphi(z)$ 在點 α, β 與 x（$\alpha<x<\beta$）都等於零。現在讓我們假定函數 $f(x)$ 在區間 (α,β) 上有連續的二級導數；顯然函數 $\varphi(z)$ 也就具有同樣的性質。在區間(α,x)與(x,β)上對函數 $\varphi(z)$ 應用洛爾定理，我們就知道 $\varphi'(z)$ 在區間(α,β)內有兩處等於零；再對函數 $\varphi'(z)$ 應用洛爾定理，就證明了函數 $\varphi''(z)$ 一定在區間(α,β)內某一點 ξ 等於零。但是因爲 $l''(z)=0$，所以

$$0=\varphi''(\xi)=f''(\xi)-2g(x)$$

因而

$$g(x)=\frac{1}{2}f''(\xi),$$

由此可見，$f''(\xi)$ 是 x 的連續函數。

這樣，我們得到了

$$f(x)-l(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\alpha)(x-\beta),$$

換句話說

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Delta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(\xi)(x-\alpha)(x-\beta)\,dx.$$

因爲函數 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 在區間 (α,β) 上不變號，而我們又知道 $f''(\xi)$ 是 x 的連續函數，所以根據中值定理(§ 51)，等式的右端就可以寫成

$$\frac{1}{2}f''(\bar{\xi})\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}f''(\bar{\xi}),$$

其中 $\bar{\xi}$ 是區間 (α,β) 內的一點。這樣一來，我們得到

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx-\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Delta=-\frac{\Delta^3}{12}f''(\bar{\xi}).$$

現在再回到我們的區間 (x_{k-1},x_k) $(1\leqslant k\leqslant n)$。在這些區間是等分的情形，我們有

$$\alpha=x_{k-1},\ \beta=x_k,\ f(\alpha)=y_{k-1},\ f(\beta)=y_k,\ \Delta=\frac{b-a}{n},$$

因而上面得到的公式就給出：

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx-\frac{y_{k-1}+y_k}{2n}(b-a)=-\frac{(b-a)^3}{12n^3}f''(\xi_k),$$

其中 $x_{k-1}<\xi_k<x_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$。把這些等式按照 k，從 1 到 n 一齊加起來，我們就得到：

$$\int_a^b f(x)\,dx-S=-\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k),$$

其中 S 是公式(1)所確定的近似值

假定用 m 及 M 分別代表函數 $f''(x)$ 在區間 (a,b) 上的最小值與最大值。於是，對於 $1\leqslant k\leqslant n$

$$m\leqslant f''(\xi_k)\leqslant M,$$

這就說明

$$nm \leqslant \sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k) \leqslant nM.$$

因此，量

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)$$

就介於 m 與 M 之間，這也就說明在 a 與 b 之間一定可以找到一個 ξ^* 使得

$$f''(\xi^*) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k),$$

而我們終於得到了梯形公式的下列誤差表達式:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k\right) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi^*).$$

我們可以看出，隨着 n 的增大這個誤差就逐漸減小，一般來說，它與 $\frac{1}{n^2}$ 是同級的無窮小量。

關於 § 57 的習題可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第四章，習題 272—274。

§ 58. 拋物線法

梯形法的基本精神是在於，在相當小的區間 $\Delta_k = (x_{k-1}, x_k)$ 上用弦(線性函數)來代替(或者說是插補)曲線 $y=f(x)$。從這裏很自然地會想到，要是在小區間上用更高次的多項式(當然首先是二次三項式)來插補函數 $y=f(x)$，應該可以得到更大的精確性。以下我們就來看看二次三項式

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

它的圖形是普通的拋物線。

把區間(a, b)分成偶數 $2n$ 等份，於是

$$\Delta_k=\frac{b-a}{2n}\quad(1\leqslant k\leqslant 2n).$$

跟前面一樣，我們還是令 $y_k=f(x_k)$ $(0\leqslant k\leqslant 2n)$。取一對相鄰的小區間 Δ_{2k-1} 與 Δ_{2k}。在它們連接起來的整個區間 (x_{2k-2}, x_{2k})上，我們用通過給定的曲線（圖 46）上三點 $M_{2k-2}(x_{2k-2}, y_{2k-2})$，$M_{2k-1}(x_{2k-1}, y_{2k-1})$，$M_{2k}(x_{2k}, y_{2k})$ 的拋物線

$$y=\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k \tag{1}$$

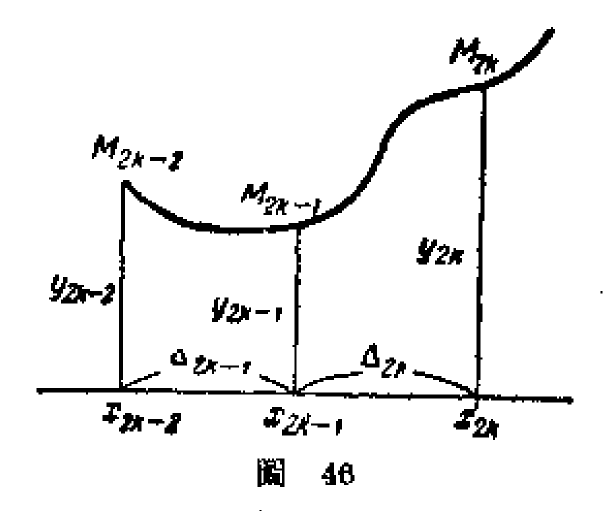


圖 46

來代替曲線 $y=f(x)$。係數 $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ 當然很容易根據這些條件計算出來，但是對於我們現在的目的來說，用不着把它們算出來。

所謂拋物線法就是在每一個區間 (x_{2k-2}, x_{2k}) $(k=1, 2, \cdots, n)$上，函數$f(x)$ 的積分都用相應的拋物線(1)的積分來代替：

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx\approx\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}(\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k)\,dx.$$

但是，由於 $x_{2k}-x_{2k-2}=\frac{b-a}{n}$ 與 $x_{2k}+x_{2k-2}=2x_{2k-1}$，我們有

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}(\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k)\,dx=$$

$$=\alpha_k\frac{x_{2k}^3-x_{2k-2}^3}{3}+\beta_k\frac{x_{2k}^2-x_{2k-2}^2}{2}+\gamma_k(x_{2k}-x_{2k-2})=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\{2\alpha_k(x_{2k-2}^2+x_{2k-2}x_{2k}+x_{2k}^2)+3\beta_k(x_{2k-2}+x_{2k})+6\gamma_k\}=$$

$$=\frac{b-a}{6n}\{(\alpha_k x_{2k-2}^2+\beta_k x_{2k-2}+\gamma_k)+(\alpha_k x_{2k}^2+\beta_k x_{2k}+\gamma_k)+$$

$$+4(\alpha_k x_{2k-1}^2+\beta_k x_{2k-1}+\gamma_k)\}=\frac{b-a}{6n}\{y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}\}.$$

因此，拋物線法給出：

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\{y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}\} \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

因而，按照所有小區間把上面的近似等式一齊加起來，就得到：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}\{y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}\} =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left\{y_0+y_{2n}+4\sum_{k=1}^{n}y_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{n-1}y_{2k}\right\}$$

這裏，跟梯形法的情形一樣，估計這個近似表達式代替積分時所產生的誤差，還要求我們進行特殊的研究（這個研究本身是計算技巧上的重要問題）。跟我們對梯形法所進行過的完全類似的計算指出，在拋物線法的情形，誤差的減小一般是與 n^4 成反比，換句話說，比梯形法的情形要減小得快得多。

關於 § 58 的習題可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第四章，習題 275－278。

第十六章　有理函數的積分法

§ 59. 一些代數預備知識

現在，在我們知道了利用原函數來計算積分是計算積分的最簡單的方法以後，我們要重新回到求原函數的問題，希望能够儘可能地擴大這個方法的應用範圍。由於在 § 56 於在所講到的理由，我們自然首先要設法把我們關於原函數是初等函數的那種函數的已知範圍儘可能地加以擴大。直到現在為止，我們僅僅知道多項式這一個比較廣的函數類，它們的原函數永遠還是多項式；所有其他那些我們作為例子舉出過的以初等函數為原函數的函數，或者是極端個別的一些函數，或者即使是一類的函數，但是其範圍也非常狹小。

多項式函數類的直接推廣就是所謂有理函數類。所謂有理函數，我們是指從自變量的值（以及一些常數）經過若干次重複的有理運算（加法、減法、乘法與除法）來得到函數值的那種函數。因此，對於造成多項式的運算來說，這裏僅僅多了一個除法運算（當然，正是由於這個除法有理函數類才成為多項式的推廣）。現在讓我們首先來研究有理函數的積分法（換句話說，來求它們的原函數）。我們研究所得的一個値得珍貴的結果是這樣一個極端重要的事實，即**一切有理函數的原函數都是初等函數**。一般說來，這些初等函數當然不見得還是有理函數：例如，像 $\frac{1}{x}$ 與 $\frac{1}{(1+x^2)}$ 這樣簡單的有理函數的原函數就已經是超越函數了。在得到上述結果的同時，我們還得到一個非常具體的辦法來確切地求出有理函數的原函數。

一切有理函數的一般積分法，都是基於它的某種特殊的表達形式，這種形式特別適合於積分法的目的。有理函數的這種特殊表達法，完

全屬於代數學的範圍，與數學分析的方法沒有任何直接的關係。正因爲如此，我們就有必要在這一章的開頭來講一些代數方面的預備知識。

在初等代數裏曾經講過，每一個有理函數 $f(x)$ 都可以表成某種"標準"形式

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

其中，$P(x)$ 與 $Q(x)$ 都是多項式，彼此沒有共同的根。這樣的分式通常叫做**有理分式**。如果分子的次數小於分母的次數，我們就說這個分式是一個**眞分式**，在相反的情形，就叫做**假分式**。

如果有理分式(1)是一個假分式，我們總可以利用初等代數中的多項式除法，根據簡單的有理運算就把這個分式表成下列形式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

其中，$S(x)$（商式）與 $R(x)$（餘式）也是多項式，並且，餘式的次數永遠小於除式的次數，這就使得上式右端的有理分式是一個眞分式。因此，有理假分式總可以表成多項式與有理眞分式之和。因爲我們已經會求多項式的積分，所以有理假分式的積分法總可以歸結到有理眞分式的積分法。因此，我們以後只限於討論 $f(x)$ 是有理眞分式的情形。

在有理分式的一切積分方法中，分式的分母 $Q(x)$ 的根起着重要的作用。如果 α（實數或複數）是多項式 $Q(x)$ 的一個根，則 $Q(x)$ 能夠被二項式 $x-\alpha$ 除盡，換句話說

$$Q(x)=(x-\alpha)Q^*(x),$$

其中，$Q^*(x)$ 也是一個多項式；如果 $Q^*(\alpha)=0$，則

$$Q(x)=(x-\alpha)^2Q^{**}(x)$$

等等。如果

$$Q(x)=(x-\alpha)^kQ_1(x), \tag{2}$$

其中 $k\geqslant1$。而 $Q_1(\alpha)\neq0$（換句話說，多項式 $Q_1(x)$ 已經不再以 α 爲根）我們就說多項式 $Q_1(x)$ 以數 α 爲 k **重根**。

引理 1. 如果實數 α 是多項式 $Q(x)$ 的 $k(k>0)$ 重根，則我們有等式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)}\tag{3}$$

其中 A_k 是一個常數，而 $P_1(x)$ 是某一個多項式.

這裏，多項式 $Q_1(x)$ 由等式(2)確定(所以 $Q_1(\alpha)\neq 0$)，A_k 是實數，所有的多項式都以實數為係數，又等式左端的分式可以是真分式也可以是假分式。

證明．等式(3)與等式

$$P(x)-A_kQ_1(x)=(x-\alpha)P_1(x)\tag{4}$$

是等價的，等式(4)是從等式(3)乘上 $Q(x)$ 得到的，它表明了多項式 $P(x)-A_kQ_1(x)$ 能够被二項式 $x-\alpha$ 整除。大家都知道，這就必須有而且也只須有：

$$P(\alpha)-A_kQ_1(\alpha)=0.\tag{5}$$

因此，如果我們令

$$A_k=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

(我們已知 $Q_1(\alpha)\neq 0$)，則等式(5)成立，因而多項式 $P(x)-A_kQ_1(x)$ 能够被 $x-\alpha$ 除盡，換句話說，我們有等式(4)，因而也就有(3)。

如果 $k\geqslant 2$，則有理分式

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)}$$

與原來的分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的形式完全一樣。對它應用我們已經證明過的引理，就得到：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-\alpha)^{k-2}Q_1(x)};$$

如果 $k\geqslant 3$，這個手續還可以繼續進行，其實只要右端的最後一個分式的分母還含有 $x-\alpha$ 的正數冪，這個手續就可以繼續進行下去。因此，

我們最後終於得到表達式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{P^*(x)}{Q_1(x)},\tag{6}$$

其中，A_1, $\cdots$ A_k 都是實數，而 $P^*(x)$ 是一個具有實係數的多項式。

在以上的全部討論中，我們都假定了 α 是一個實數。很明顯，如果 α 是一個複數，上述的一切仍然是正確的；當然，數 A_k 以及所得出的多項式的係數都要是複數了。我們沒有討論過，而且也不打算討論複數表達式的積分法，因此，當根 α 是複數的情形，我們要用另外的方法來給出有理分式的分解式。

如果(實係數)多項式 $Q(x)$ 以複數 $\alpha=\beta+i\gamma(\gamma\neq0)$ 爲它的 k 重根，在代數學裏我們已經學過，"共軛"複數 $\alpha^*=\beta-i\gamma$ 就一定也是這個多項式的根，而且也是 k 重根。在這個情形下，多項式 $Q(x)$ 能够被 $(x-\alpha)^k$ 及 $(x-\alpha^*)^k$ 整除，因而也就能够被它們的乘積整除；但是因爲

$$(x-\alpha)(x-\alpha^*)=(x-\beta)^2+\gamma^2,$$

所以，我們得到：

$$Q(x)=[(x-\beta)^2+\gamma^2]^kQ_1(x),\tag{7}$$

其中 $Q_1(\alpha)\neq0$, $Q_1(\alpha^*)\neq0$，數 β 與 γ 以及多項式 $Q(x)$ 的係數顯然都是實數。

引理 2. **如果複數 $\alpha=\beta+i\gamma(\gamma\neq0)$ 是多項式 $Q(x)$ 的 k 重根，則我們有等式**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_kx+C_k}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^k}+\frac{P_1(x)}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^{k-1}Q_1(x)},\tag{8}$$

其中，B_k 與 C_k 都是常數，又 $P_1(x)$ 是一個多項式。

這裏，多項式 $Q_1(x)$ 由等式(7)確定，數 B_k 與 C_k 以及多項式 $P_1(x)$ 的係數都是實數，又等式左端的分式可以是真分式也可以是假分式。

證明. 爲簡單起見，令

$$(x-\alpha)(x-\alpha^*)=(x-\beta)^2+\gamma^2=q(x).$$

等式(8)與等式

$$P(x)-(B_k x+C_k)Q_1(x)=q(x)P_1(x)$$

是等價的，這無異於要求等式左端的多項式能夠被 $q(x)$ 整除，也就是說，能夠被 $x-\alpha$ 與 $x-\alpha^*$ 整除；但是要辦到這一點，我們必須有而且也只須有：

$$P(\alpha)-(B_k\alpha+C_k)Q_1(\alpha)=P(\alpha^*)-(B_k\alpha^*+C_k)Q_1(\alpha^*)=0,$$

或即

$$B_k\alpha+C_k=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)},$$

$$B_k\alpha^*+C_k=\frac{P(\alpha^*)}{Q_1(\alpha^*)}.$$

因此，我們已經有了由兩個線性方程做成的方程組，來確定未知數 B_k 與 C_k，又因爲這個方程組的係數行列式是 $\alpha-\alpha^*=2i\gamma\neq0$，所以 B_k 與 C_k 永遠可以唯一地確定出來。不難看出這樣得到的 B_k 與 C_k 的表達式，關於 α 與 α^* 是對稱的，因而 B_k 與 C_k 都是實數。這就證明了引理 2。

跟實數根的情形完全一樣，當 $k>1$ 時，等式(8)右端的後一個分式與原來的分式的形式相同。因而，我們可以對它應用同一引理。繼續進行這種手續，跟前面一樣，如果多項式 $Q(x)$ 以 $\alpha=\beta+i\gamma(\gamma\neq0)$ 爲 k 重根，又如果 $Q_1(x)$ 由等式(7)確定，則我們就有等式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_kx+C_k}{\{q(x)\}^k}+\frac{B_{k-1}x+C_{k-1}}{\{q(x)\}^{k-1}}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{q(x)}+\frac{P^*(x)}{Q_1(x)},\qquad(9)$$

其中，$q(x)=(x-\beta)^2+\gamma^2$，$B_1, B_2, \cdots, B_k, C_1, C_2, \cdots, C_k$ 都是實數，並且 $P^*(x)$ 是一個實係數的多項式。

關於等式(6)與(9)，我們指出下述的一般的應該注意之點：如果這兩個等式中的任何一個的左端是有理眞分式，則它的右端的末一個分式也一定是眞分式；這只要讓變量 x 無限增大就可以看出來；這時候，除去 $\dfrac{P^*(x)}{Q_1(x)}$ 以外，等式的所有各項都趨向於零，因此，等式的末一個分

式也必須趨向於零，這當然只有在它是一個眞分式的時候才有可能。

現在，我們已經不難把任何一個有理眞分式化成某種便於積分的"標準"形式了。跟每一個實係數的多項式一樣，這個分式的分母$Q(x)$一般來說，也具有某些彼此不同的實根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ 以及某些彼此不同的一對一對的共軛虛根 $\beta_1 \pm i\gamma_1, \beta_2 \pm i\gamma_2, \cdots, \beta_s \pm i\gamma_s$。每一個實根 α_m 都具有確定的重複次數 $k_m (1 \leqslant m \leqslant r)$，同樣每一對虛根也都具有確定的重複次數 $l_n (1 \leqslant n \leqslant s)$。於是，我們從代數上知道

$$Q(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}(x-\beta_1-i\gamma_1)^{l_1} \times$$
$$\times (x-\beta_1+i\gamma_1)^{l_1}\cdots(x-\beta_s-i\gamma_s)^{l_s}(x-\beta_s+i\gamma_s)^{l_s} =$$
$$= a\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{l_n}, \qquad (10)$$

其中 $a \neq 0$ 是一個常數。

對於給定的分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 以及根 α_1，應用公式(6)，我們得到

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \qquad (11)$$

其中，$A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \cdots, A_{k_1}^{(1)}$ 都是固定的實數，$Q_1(x) = a\prod_{m=2}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m} \times \prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{l_n}$，又右端的最後一個分式是一個眞分式。

但是分式$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$與給定的分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$的形式相同，因而我們又可以按照公式(6)來把它分解，例如說對於 α_2；這就給出：

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \qquad (12)$$

其中

$$Q_2(x) = a\prod_{m=3}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{l_n}.$$

並且末一個分式仍舊是眞分式。把(12)代入(11)，我們得到

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\cdots+\frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\cdots+\frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

把所述的手續進行 r 次（對 r 個實根 α_m 中的每一個進行一次），顯然我們就得到等式

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}+\\&+\frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{k_2-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2}+\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\&+\frac{A_{k_r}^{(r)}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}+\frac{A_{k_r-1}^{(r)}}{(x-\alpha_r)^{k_r-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(r)}}{x-\alpha_r}+\frac{P^*(x)}{Q^*(x)},\end{aligned}\qquad(13)$$

其中，末一個分式是眞分式，並且它的分母

$$Q^*(x)=a\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{l_n}$$

只以原來的分母 $Q(x)$ 的虛根 $\beta_n\pm i\gamma_n$ 爲它自己的根了。因此，對於分式 $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ 由公式(6)所表達的實根的“分離”手續已經不再能繼續進行。自然，我們現在就對它進行公式(9)所寫出的虛根的“分離”手續。顯然，跟實根的情形沒有什麼不同，應用公式(9) s 次以後，我們得到分解式

$$\begin{aligned}\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}=&\frac{B_{l_1}^{(1)}x+C_{l_1}^{(1)}}{[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2]^{l_1}}+\cdots+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2}+\\&+\frac{B_{l_2}^{(2)}x+C_{l_2}^{(2)}}{[(x-\beta_2)^2+\gamma_2^2]^{l_2}}+\cdots+\frac{B_1^{(2)}x+C_1^{(2)}}{(x-\beta_2)^2+\gamma_2^2}+\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\&+\frac{B_{l_s}^{(s)}x+C_{l_s}^{(s)}}{[(x-\beta_s)^2+\gamma_s^2]^{l_s}}+\cdots+\frac{B_1^{(s)}x+C_1^{(s)}}{(x-\beta_s)^2+\gamma_s^2}+\frac{P^{**}(x)}{Q^{**}(x)},\end{aligned}$$

其中，右端的末一個分式是一個眞分式；但是因爲原來的分母 $Q(x)$ 的

一切根都已經用盡，$Q^{**}(x)$ 不再有根，因而只能够有 $P^{**}(x)\equiv 0$。把以上得到的分式 $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ 的這個分解式代入(13)，我們就得到原來的分式的最終的分解式，我們把它寫成下列的非常緊湊的形式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{m=1}^{r}\sum_{u=1}^{k_m}\frac{A_u^{(m)}}{(x-\alpha_m)^u}+\sum_{n=1}^{s}\sum_{v=1}^{l_n}\frac{B_v^{(n)}x+C_v^{(n)}}{[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^v}. \tag{14}$$

有理眞分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的這個分解式就是我們的目標。我們已經證明了這個分解永遠是可能的；同時，它還是唯一的，因爲在一連串尋求數 $A_u^{(m)}$，$B_v^{(n)}$ 與 $C_v^{(n)}$ 的過程中。在各個階段我們都證明了確定它們的唯一性，但是，另一方面，一般說來，以上用來計算分解式(14)的那些係數的方法却並不是最簡單的。"待定係數"的方法常常比較簡單而且對稱。我們用尚待確定的係數 $A_u^{(m)}$，$B_v^{(n)}$ 與 $C_v^{(n)}$ 直接把分解式(14)寫出來，再用 $Q(x)$ 遍乘這個關係式的兩端，就立刻擺脫了分式。這時，我們在左端得到了多項式 $P(x)$，而在右端，把同類項合併之後也得到一個多項式，它的係數含有未知數 $A_u^{(m)}$、$B_v^{(n)}$ 及 $C_v^{(n)}$，並且顯然可以看出，都是這些數的線性組合。

因爲這樣得到的等式應該是一個恆等式，所以左右兩端的 x 的同次冪的係數應該相同。在這些一對一對的同次冪係數之間寫上等號，我們就得到未知數 $A_u^{(m)}$，$B_v^{(n)}$ 與 $C_v^{(n)}$ 的一個線性方程組，從這個方程組，未知係數就可以完全確定出來，這裏，方程組的解的存在性與唯一性是我們早就知道了的。其實，不難算出，方程組中方程的個數與未知數的個數相等。事實上，假定多項式 $Q(x)$ 的次數等於 N。把等式(14)的左右兩端乘以 $Q(x)$ 之後，我們在右端顯然得到一個 $N-1$ 次的多項式；在左端我們的多項式是 $P(x)$，由於 $\frac{P}{Q}$ 是眞分式，$P(x)$ 的次數不能超過 $N-1$。但是，因爲 $N-1$ 次的多項式具有 N 個係數，所以，比較左右兩端的對應係數，得到的是一個包含 N 個方程的方程組。另一

方面，數 $A_{\nu}^{(m)}$ $(1\leqslant m\leqslant r,\ 1\leqslant \nu\leqslant k_m)$ 的個數等於 $\sum_{m=1}^{r} k_m$；類似地，$B_{\nu}^{(n)}$ 的個數與 $C_{\nu}^{(n)}$ 的個數相同都等於 $\sum_{n=1}^{s} l_n$。因此，全部未知數的個數就是

$$\sum_{m=1}^{r} k_m + 2\sum_{n=1}^{s} l_n.$$

但是，把 $Q(x)$ 分解成一次因子的分解式(10)告訴我們，這個數也剛好等於多項式 $Q(x)$ 的次數 N。因此，未知數的個數總是等於我們得出的線性方程的個數。

爲了實際得出分解式(14)，不論用什麼辦法，我們都必須知道多項式 $Q(x)$ 的全部的根以及它們的重複次數。這是一個代數問題，我們常常不會解決這個問題，但是在我們轉而研究一個給定的有理分式的積分法時，我們應該事先假定，我們是會分解這個有理分式的。

例．根據公式(14)，分式

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

可以表成下列形式：

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+1)^2}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+1};$$

把兩端同乘以 $(x-1)(x^2+1)^2$，再把右端的同類項加以合併，我們就得到：

$$2x+2=(A+B_2)x^4+(C_2-B_2)x^3+(2A+B_1+B_2-C_2)x^2+$$
$$+(C_1-B_1+C_2-B_2)x+(A-C_1-C_2).$$

比較左右兩端相應的係數，就得出方程組：

$$A+B_2=0,\qquad C_2-B_2=0,$$
$$2A+B_1+B_2-C_2=0,$$
$$C_1+C_2-B_1-B_2=2,$$
$$A-C_1-C_2=2;$$

這個方程組很容易解,並且有:

$$A=1,\ B_1=-2,\ C_1=0,\ B_2=-1,\ C_2=-1.$$

因此,

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}-\frac{x+1}{x^2+1}.$$

§ 60. 簡單分式的積分法

利用 § 59 的公式 (14) 任何一個有理真分式 (因而任何一個假分式)的積分問題都可以歸結到一串特殊類型的有理分式的積分問題,我們把這些特殊類型的分式稱爲**簡單分式**。簡單分式可以分做兩種類型,一種是

$$\frac{A}{(x-\alpha)^u},$$

其中 A 與 α 是固定的實數,而 u 是固定的自然數,我們把它們叫做**第一型**的簡單分式, 另一種是

$$\frac{Bx+C}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^v},$$

其中 B, C, β, γ 都是固定的實數,而 v 是固定的自然數, 我們把它們叫做**第二型**的簡單分式。在本節中, 我們要學會怎麼樣來求所有這兩種類型的簡單分式的原函數。如果能這樣,根據公式(14),我們就可以認爲任意有理函數的積分的一般問題是完全解決了。

1°. **第一型的簡單分式**。我們直接可以求出

$$\int\frac{A\,dx}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+H,$$

其中H是積分常數。同樣地,對於 $u>1$, 我們也可以直接得到:

$$\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^u}=\int A(x-\alpha)^{-u}dx=\frac{A}{-u+1}(x-\alpha)^{-u+1}+H=$$

$$=\frac{-A}{(u-1)(x-\alpha)^{u-1}}+H.$$

顯然，這就完全解決了第一型簡單分式的積分問題。我們看到，這一型的簡單分式的原函數或者仍然是第一型的簡單分式（當 $u>1$），或者是一個對數函數（當 $u=1$）。

2°. 第二型的簡單分式。先假定 $v=1$，換句話說，我們先考慮簡單分式

$$\frac{Bx+C}{(x-\beta)^2+\gamma^2},$$

作替換 $x=\beta+\gamma y\left(y=\frac{x-\beta}{\gamma},\ dx=\gamma dy\right)$，得出：

$$\int\frac{Bx+C}{(x-\beta)^2+\gamma^2}dx=\int\frac{B(\beta+\gamma y)+C}{\gamma^2(1+y^2)}\gamma dy=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{2ydy}{1+y^2}+\frac{B\beta+C}{\gamma}\int\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(1+y^2)+\frac{B\beta+C}{\gamma}\operatorname{arctg}y+H=$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left\{1+\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)^2\right\}+\frac{B\beta+C}{\gamma}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)+H. \quad (1)$$

現在假定 v 是任意一個自然數。同一個替換 $x=\beta+\gamma y$ 先給出：

$$\int\frac{Bx+C}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^v}dx=\int\frac{B(\beta+\gamma y)+C}{\gamma^{2v}(1+y^2)^v}\gamma dy=$$

$$=\frac{B}{2\gamma^{2v-2}}\int\frac{2y}{(1+y^2)^v}dy+\frac{B\beta+C}{\gamma^{2v-1}}\int\frac{dv}{(1+y^2)^v}.$$

這裏，右端的第一個原函數又可以直接算出：

$$\int\frac{2y}{(1+y^2)^v}dy=-\frac{1}{(v-1)(1+y^2)^{v-1}}+H$$

（我們預先假定了 $v>1$，因爲 $v=1$ 的情形已經在上面討論過了）。這樣一來，要完全解決我們的問題，就只剩下求原函數

$$I_v=\int\frac{dy}{(1+y^2)^v}$$

的問題了，這裏 v 是任意一個自然數（暫時我們還只知道 $I_1=\operatorname{arctg}y+$

$+H$)。为了这个目的，我們現在来导出一个遞推公式，对于任意的自然数 v，用 I_v 来表达出 I_{v+1}。如果办到了这一点，則我們既然已經知道了 I_1，就可以依次地求出 I_2, I_3 等等，以及对于任意 v，求出一般的 I_v。

我們有：

$$I_{v+1}=\int\frac{dy}{(1+y^2)^{v+1}}=\int\frac{(1+y^2)-y^2}{(1+y^2)^{v+1}}dy=$$

$$=I_v-\frac{1}{2}\int y\frac{2y}{(1+y^2)^{v+1}}dy. \qquad (2)$$

对于右端的最后一个原函数，我們应用分部积分法；由于

$$\int\frac{2y\,dy}{(1+y^2)^{v+1}}=-\frac{1}{v(1+y^2)^v}+H,$$

我們得到：

$$\int y\frac{2y\,dy}{(1+y^2)^{v+1}}=-\frac{y}{v(1+y^2)^v}+\frac{1}{v}\int\frac{dy}{(1+y^2)^v}=$$

$$=-\frac{y}{v(1+y^2)^v}+\frac{1}{v}I_v,$$

由此，等式(2)給出：

$$I_{v+1}=\frac{2v-1}{2v}I_v+\frac{y}{2v(1+y^2)^v}. \qquad (3)$$

例如

$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{y}{2(1+y^2)}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}y+\frac{y}{2(1+y^2)}+H$$

等等。公式(3)就是我們所要找的遞推公式；由于它的建立，我們就完全解决了第二型簡单分式的积分問題。

考察一下我們所得的結果，立刻可以看出，在积分簡单分式时（也就是說，在积分任意一个有理分式时），除去有理函数以外，仅仅还可能出現对数函数与反正切函数。特别，这就証明了我們在前面所做的論断，任何有理函数的原函数都是初等函数。

我們还要做出以下的有趣的提示。在一开始讲函数的积分法时，我

們就曾經注意到，作爲極簡單的有理分式的原函數，函數 $\ln x$ 與 $\operatorname{arctg} x$ 就已經出現了：

$$\int \frac{dx}{x}=\ln x+C, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C.$$

現在，有理分式的積分理論已經發展得很完備，我們可以親眼看到，不論有理函數怎樣複雜，要表達出它的原函數，除 $\ln x$ 與 $\operatorname{arctg} x$ 這兩個函數以外，我們並不需要任何其他的超越函數。

在 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第三章，習題 174—190，讀者可以找到用待定係數法求有理函數的原函數的大量習題，可以根據教師的指導，從裏面挑三四個題來做。

§ 61. 奧斯特洛格拉得斯基方法

在前節中，我們已經看到，只要我們知道了一個有理分式的分母的根要來求出這個分式的原函數，決不會引起原則性的困難；然而，這通常要牽聯到相當費力的計算。M. B. 奧斯特洛格拉德斯基提出了一個很巧妙的一般方法，在許多情形下，這個方法可以大大地減化這些計算。爲了敘述這個方法，我們需要回到前兩節的推理中去。

仍然假定 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是一個有理真分式，並且

$$Q(x)=a\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{l_n}. \tag{1}$$

我們已經知道，分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 具有 § 59 的分解式(14)（並且是唯一的），它把分式分解爲第一型與第二型的簡單分式，我們就是利用這個分解式，來求得給定的分式的原函數的。在這裏，我們進一步指出下述的附帶結果。

在積分第一型分式時

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

只是 $u=1$ 的情形，才得到對數函數，所有 $u>1$ 的情形，都得到下列形式的有理函數

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^u}dx=-\frac{A}{(u-1)(x-\alpha)^{u-1}}+H. \tag{2}$$

第二型分式

$$\frac{Bx+C}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^v}$$

的情形比較複雜一點。

令 $x=\beta+\gamma y$，當 $v>1$ 時，我們有

$$\int \frac{Bx+C}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^v}dx=\frac{\lambda_v}{(1+y^2)^{v-1}}+\mu_v I_v, \tag{3}$$

其中

$$I_v=\int \frac{dy}{(1+y^2)^v},$$

λ_v 與 μ_v 都是常數。但是，另一方面，重複地應用 § 60 的遞推公式(3)，顯然可以把原函數 I_v 表成下列形式的和數:

$$I_v=\nu_v I_1+\frac{L(y)}{(1+y^2)^{v-1}},$$

其中 ν_v 是常數，$L(y)$ 是一個多項式，而末一個分式是一個眞分式。把這個表達式帶入(3)，同時把 y 還原到 x，我們不難算出:

$$\int \frac{Bx+C}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^v}dx=\frac{R(x)}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^{v-1}}+\sigma_v\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\gamma^2}, \tag{4}$$

其中 $R(x)$ 是一個多項式，σ_v 是常數，並且右端的第一個分式是一個眞分式。這是 $v>1$ 的情形；當 $v=1$ 時，我們有 § 60 的公式(1)，這個公式的右端就沒有有理項。

利用 § 59 的分解式(14)，我們現在可以把分式 $\frac{P}{Q}$ 的原函數看得很清楚。在進行積分時，我們看到從(2)與(4)這個分解式的 $u>1$ 或 $v>1$ 的那些項首先給出以

$$(x-\alpha_m)^{u-1},\ \ [(x-\beta_n)^2+\gamma_n{}^2]^{v-1}$$

爲分母的有理眞分式。

把所有這些眞分式歸併起來，我們同樣得到一個眞分式

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

它的分母顯然等於

$$Q_1(x)=\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m-1}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{l_n-1}. \tag{5}$$

這個眞分式就是所給的分式 $\frac{P}{Q}$ 的積分的有理部分。其次，積分的超越部分由下述兩個部分所組成：а) § 59 的分解式(14)的 $u=1$ 或 $v=1$ 的那些項的原函數，б) 根據公式(4)得出的第二型的原函數。不管是 а) 或 б) 的情形，被積函數都是

$$\frac{A}{x-\alpha} \text{ 或 } \frac{Bx+C}{(x-\beta)^2+\gamma^2};$$

因此，所有這些被積函數之和是一個有理眞分式

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

其中

$$Q_2(x)=\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]. \tag{6}$$

這樣一來，我們就得到了著名的奧斯特洛格拉德斯基公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{7}$$

其中，右端的第一項與第二項分別是原函數的有理部分與超越部分。並且，$Q_1(x)$ 與 $Q_2(x)$ 分別由公式(5)與(6)確定，而分式 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 與 $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 都是眞分式。

這個分解式的一個非常值得注意的地方，是它永遠可以用有理方法來得到，而**不需要知道多項式 $Q(x)$ 的根**。其實，從代數學中大家都知道，多項式 $Q(x)$ 的 k 重根是多項式 $Q'(x)$ 的 $k-1$ 重根；因而，如果

我們假定

$$Q(x)=a\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{l_n},$$

則

$$Q'(x)=\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m-1}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{l_n-1}R(x)=Q_1(x)R(x),$$

其中，$R(x)$ 與多項式 $Q(x)$ 沒有公根。這就說明多項式 $Q_1(x)$ 是多項式 $Q(x)$ 與 $Q'(x)$ 的最高公因式，因此，就可以用通常的求最高公因式的輾轉相除法來求出 $Q_1(x)$。但是因爲公式(1)，(5)與(6)給出

$$Q(x)=a\,Q_1(x)Q_2(x),$$

所以，知道了 $Q(x)$ 與 $Q_1(x)$ 就可以用初等的有理運算求出 $Q_2(x)$。最後，要求出多項式 $P_1(x)$ 與 $P_2(x)$，我們對等式(7)的兩端微分：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q_1(x)P_1'(x)-P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}. \tag{8}$$

按照公式(5)，多項式 $Q_1(x)$ 的每一個根 λ 都是多項式 $Q(x)$ 的根，也就是說（由於(6)）都是多項式 $Q_2(x)$ 的根。如果 $Q_1(x)$ 含有二項式 $x-\lambda$ 的 k $(k>0)$ 次乘冪，則 $Q_1'(x)$ 含有 $x-\lambda$ 的 $k-1$ 次乘冪，又 $Q_2(x)$ 含有它的一次乘冪，而因乘積 $Q_1'(x)Q_2(x)$ 與多項式 $Q_1(x)$ 同樣含有 $x-\lambda$ 的 k 次乘冪。但是因爲這對於多項式 $Q_1(x)$ 的任何一個根都是對的，所以 $Q_1'(x)Q_2(x)$ 能被 $Q_1(x)$ 整除，換句話說

$$Q_1'(x)Q_2(x)=Q_1(x)S(x),$$

其中 $S(x)$ 是一個多項式。因此，我們有

$$\frac{Q_1(x)P_1'(x)-P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)}=\frac{Q_2(x)Q_1(x)P_1'(x)-Q_2(x)P_1(x)Q_1'(x)}{Q_2(x)Q_1^2(x)}=$$

$$=\frac{Q_1(x)[Q_2(x)P_1'(x)-P_1(x)S(x)]}{Q_2(x)Q_1^2(x)}=\frac{Q_2(x)P_1'(x)-P_1(x)S(x)}{Q_2(x)Q_1(x)},$$

因而在把分解式(8)的兩端都乘以 $Q(x)=aQ_1(x)Q_2(x)$ 之後，就得到：

$$P(x)=a[Q_2(x)P_1'(x)-P_1(x)S(x)]+aP_2(x)Q_1(x). \tag{9}$$

在這個等式中，多項式 $P(x)$，$Q_1(x)$，$Q_2(x)$ 與 $S(x)$ 都是已知的，又根據 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 與 $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 都是眞分式，我們可以確定所要找的多項式 $P_1(x)$ 與 $Q_1(x)$ 的最高的可能的次數。因此，從關係式(9)，多項式 P_1 與 P_2 可以用待定係數法求出來。我們不難由計算知道，這裏未知係數的個數與得到的方程的個數正好相等，而我們已經證明了的分解式(8)的存在性，保證了這個方程組是可解的。

這樣一來，奧斯特洛格拉德斯基公式(7)的所有各項都能夠實際地用有理方法來確定，並且，在這樣做時，我們不需要知道所給分式的分母的根。因而，即使不知道這些根，我們也能求出給定的有理分式的原函數的有理部分。

關於奧斯特洛格拉德斯基方法的一些習題可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第三章，習題 191—193。

第十七章　簡單的無理函數與超越函數的積分法

在前章中，我們證明了一切有理函數，都有初等的原函數，並且指出了如何去求得這種原函數的一般方法。但是，一旦我們超出有理函數的範圍，初等原函數的存在與否就不再有一般的準則，因而，我們也就不能像第十六章中那樣再得出一套一般性的理論。不過，儘管如此，在代數無理函數以及超越函數中，還有相當多的類型是可以用初等函數積分出來的；這些類型的函數中，多半都包括一些相當簡單，因而在實際應用中常常碰到的函數。此外，求出這些函數的原函數的方法又常常對我們具有很大的啓發性；因此我們要在這一章中研究若干這種重要的函數類型。我們這裏用來積分無理函數與超越函數的方法是所謂有理化方法：作適當的變量替換，把被積函數變成有理函數；只要這一點做到了，在原則上來說，我們的問題就已經解決了，因為積分有理函數我們總是會做的。

§ 62. $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ 型函數的積分法

超出了有理函數範圍的函數中，最簡單的，是那種除有理運算外還含有一個根式的函數。這種函數的最一般的形式的結構顯然是這樣的：先把一個有理函數 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$（這裏 $P(x), Q(x)$ 都是多項式）開某一個 n 次根，然後再作變量 x 與變量

$$y=\sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}}$$

的有理函數 $R(x,y)$。因此，在無理的代數函數中，我們首先應該去求出

$$\int R\left\{x, \sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right\}dx \tag{1}$$

型的原函數，其中 $P(x)$, $Q(x)$ 都是多項式，$n>1$ 是一個自然數，而 $R(x,y)$ 是某一個二元的有理函數。

但是，(1)型的原函數，只有在正整數 n 與多項式 P,Q 是非常簡單的很少幾種情况下，才是可以用初等函數來表達的。在這一節中，我們考察 P 與 Q 都是一次二項式的情形(數 n 是任意的)。我們就會看到，這種類型的原函數是初等函數，而且很容易就可以求出來。

因此，我們現在的任務是要求出原函數

$$\int R\left\{x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right\}dx,$$

其中 a, b, c, d 都是常數，n 是一個自然數。我們令

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t, \tag{2}$$

於是

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n, \quad x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}=\varphi(t), \quad dx=\varphi'(t)dt,$$

因而，

$$\int R\left\{x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right\}dx=\int R\{\varphi(t),t\}\varphi'(t)dt.$$

因爲函數 $\varphi(t)$ (因而，它的導函數 $\varphi'(t)$) 是有理函數，所以上式右端是一個有理函數的原函數，因而可以表成 t 的初等函數；用(2)式中 t 的值代入，就把所求的原函數表成了 x 的初等函數了。

例. 假定要求的原函數是

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}.$$

因爲分母中的兩個根式都是根式 $\sqrt[12]{1+x}$ 的正的整數次乘冪，所以給定的原函數是我們剛才所考慮的那種類型($n=12, a=b=d=1, c=0$).

令

$$\sqrt[12]{1+x}=t,$$

於是 $x=t^{12}-1$, $dx=12t^{11}dt$, $\sqrt[3]{1+x}=t^4$, $\sqrt[4]{1+x}=t^3$, 給定的原函數就變形成爲

$$12\int\frac{t^{11}\,dt}{t^4-t^3}=12\int\frac{t^8dt}{t-1}.$$

這樣一來,被積函數就有理化了。再做下去,得到:

$$12\int\frac{t^8dt}{t-1}=12\int\frac{t^8-1}{t-1}dt+12\int\frac{dt}{t-1}=$$
$$=12\int(t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)dt+12\int\frac{dt}{t-1}=$$
$$=12\left\{\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right\}+12\ln|t-1|+C.$$

在上式中代入 $t=\sqrt[12]{1+x}$, 給定的原函數就表成了原來變量 x 的表達式。

其他的練習可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集,第三章,習題 211, 212, 215, 217。

§ 63. $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 型函數的積分法

前節中的多項式 P 與 Q 卽使只有一個的次數大於一,就只在不多幾種情形下,可以積分成爲初等函數。現在我們要研究的是一種在應用中常常遇到的情形,卽 $n=2$, $Q(x)=1$, $P(x)$ 是一個二次三項式 ax^2+bx+c 的情形,換句話說,我們要討論

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

型的原函數,這裏 $R(x,y)$ 仍舊表示任意一個有理二元函數。我們來證明,這種原函數永遠可以有理化,因而,一定可以表作初等函數。不過,這個有理化所需的積分變量的替換,在不同的情形下是各不相同的。

1°. 如果三項式 ax^2+bx+c 的根 α 與 β 是實根,我們就有(假定 $x>\alpha$):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}};$$

從而，被積函數成爲 x 與根式

$$\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$$

的有理函數；而這就變成了我們前節中討論過的情形。我們知道，只要作替換

$$\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}=t,$$

被積函數就有理化了。

2°. 如果三項式 ax^2+bx+c 的根是虛根，於是對一切 x 的值，三項式都保持同一的符號。我們很自然地假定它總是正的，因爲如果不然，對每一個 x 的值，根式都是虛的，我們的問題就沒有意義了。令 $x=0$，我們就知道，在這種情形應該永遠有 $c>0$（我們這裏提出的方法，事實上只要 $c>0$ 就行，與三項式的根是實根還是虛根並沒有關係）。令

$$\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}=t;$$

於是

$$ax^2+bx+c=(tx+\sqrt{c})^2=t^2x^2+2\sqrt{c}\,tx+c,$$

$$ax+b=t^2x+2\sqrt{c}\,t,$$

$$x=\frac{b-2\sqrt{c}\,t}{t^2-a}=\varphi(t),$$

$$dx=\varphi'(t)dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}=t\varphi(t)+\sqrt{c},$$

因而我們得到：

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=\int R\{\varphi(t),\,t\varphi(t)+\sqrt{c}\}\varphi'(t)dt.$$

因爲函數 $\varphi(t)$（因而，它的導函數 $\varphi'(t)$ 也一樣）是有理函數，所以給定的原函數的有理化已經完成。

以上兩種情形中，有理化所需的積分變量的替換都是尤拉提出的，所以我們通常都把它們叫做**尤拉替換**。

例 1. 在原函數

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$(a>0,\ |x|>a)$中，多項式$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$的根都是實根。引用尤拉的第一個替換

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=t,$$

並且爲確定起見設$x>a$，於是

$$\frac{x-a}{x+a}=t^2,\quad x=a\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad dx=\frac{4at}{(1-t^2)^2}dt,$$

$$x+a=\frac{2a}{1-t^2},\ \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\cdot(x+a)}=\frac{1-t^2}{2at},$$

從而

$$I=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1+t}+\int\frac{dt}{1-t}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C.$$

但是

$$\frac{1+t}{1-t}=\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\frac{1}{2a}(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})^2=\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2}),$$

所以

$$I=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C;$$

對於$x<-a$的情形，我們同樣可得：

$$I=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

例 2. 在原函數

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

中，有 $a^2>0$，我們可以引用尤拉的第二個替換：

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x}=t, \quad \sqrt{x^2+a^2}=xt+a.$$

由此算出：

$$x=\frac{2at}{1-t^2}, \quad dx=\frac{2a(1+t^2)}{(1-t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+a^2}=\frac{2at^2}{1-t^2}+a=a\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$\sqrt{x^2+a^2}+x=a\frac{1+t}{1-t},$$

因而，

$$I=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

例 3. 對於原函數

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

可以引用尤拉的兩個替換中的任何一個。不過在這裏用替換 $x=at$ 要更簡單得多；我們有：

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

其他的練習，可以參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第三章，習題 219—222 與 245—247。

§ 64. 二項型微分的原函數

我們現來考慮一類特別形式的代數函數的積分法；這種類型的積分在實際應用中常常會碰到。不過，這一積分類型在歷史上之所以有名，主要的倒還不在我們時常遇到它，而是在於我們知道只有在少數幾種情形，這種積分才能表作初等函數，此外就都不能這樣表達。

下列形式的表達式:

$$x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}dx,$$

稱爲一個二項型微分，其中所有的指數 α, β 與 γ 都是有理數，a 與 b 是任何實數。我們現在來研究，在什麼樣的條件下，原函數

$$I=\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}dx$$

是初等函數。

令 $x^{\beta}=t$，於是❶

$$x=t^{\frac{1}{\beta}},\quad dx=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt.$$

因此，

$$I=\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}(a+bt)^{\gamma}dt. \tag{1}$$

我們要證明，只要 $\frac{\alpha+1}{\beta}$, γ, $\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$ 這三個數中有一個是整數，I 就是初等函數。我們同時還要指出求得這些函數的方法。

1°. 假定 γ 是整數。於是原函數(1)的被積函數成爲 t 與 $t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}$ 有理函數；設

$$\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{m}{n},$$

其中 m, n 都是整數($n>0$)，則被積函數是 $R(t,\sqrt[n]{t})$ 型的，這裏 $R(x,y)$ 是一個有理二元函數。因此，原函數 I 是我們在 § 62 中考慮過的那種形式，因而是可以表作初等函數的。

2°. 假定 $\frac{\alpha+1}{\beta}$ 是整數。於是(1)的被積函數是 t 與 $(a+bt)^{\gamma}$ 的有理函數；如果 $\gamma=\frac{p}{q}$，其中 p 與 $q>0$ 都是整數，則被積函數成爲 $R(t,\sqrt[q]{a+bt})$ 型的函數。因此(1)還是 § 62 中考慮過的那種類型的原函數。

❶ 我們不妨設 $\beta\neq0$，因爲 $\beta=0$ 的情形顯然是不成問題的。

3°. 最後，假定 $\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$ 是整數，(1)的被積函數可以另外改寫成

$$\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\gamma}\cdot t^{\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma-1},$$

因而它是 t 與 $\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\gamma}$ 的有理函數；如果 $\gamma=\frac{p}{q}$，其中 p 與 $q>0$ 都是整數，則被積函數成爲

$$R\left(t, \sqrt[q]{\frac{a+bt}{t}}\right)$$

型的函數。這當然還是 § 62 中的那種類型。

因此，我們前面的論斷已經完全證明了。另一方面 П. Л. 車貝謝夫曾經指出，以上所考慮的，是二項型微分的原函數能够是初等函數的僅有的三種情形，換句話說，如果 a 與 b 都不是零，又 $\frac{\alpha+1}{\beta}$，γ，$\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$ 三數中沒有一個是整數，則二項型微分 $x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}dx$ 的原函數不可能是初等函數。可惜的是，這個著名定理的證明是過於複雜，我們沒有可能在這裏加以論述。

本節練習可參看 Б. П. 捷米多維奇的習題集，第三章，習題 252，253，260。

§ 65. 三角微分的積分法

我們現在開始來考慮某些類型的超越函數的積分法，首先我們考慮三角函數 $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ 的有理函數。因爲所有這些三角函數都可表作 $\sin x$, $\cos x$ 的有理函數，所以我們以下只討論 $R(\sin x, \cos x)$型的函數，這裏 $R(x, y)$ 是一個有理二元函數。

原函數

$$I=\int R(\sin x, \cos x)\,dx \tag{1}$$

永遠是初等函數。要想證明這一點，只要引進積分新變量

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t. \tag{2}$$

這時（x 的值限定在區間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 上）

$$x=2\operatorname{arctg} t, \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

因而

$$I=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

這是一個有理函數的原函數。

例 1. 求原函數

$$I=\int\frac{dx}{1-\lambda^2\cos x},$$

其中 λ^2 是一個正數。我們分別考慮 $\lambda^2<1$, $\lambda^2>1$ 和 $\lambda^2=1$ 的情形。

1）如果 $\lambda^2<1$，我們可以令 $1-\lambda^2=\alpha^2$, $1+\lambda^2=\beta^2$。於是替換(2)給出：

$$I=\int\frac{2dt}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1+t^2-\lambda^2(1-t^2)}=\int\frac{2dt}{\alpha^2+\beta^2t^2}=\frac{2}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta t}{\alpha}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\lambda^4}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

2）如果 $\lambda^2>1$，我們可以令 $1-\lambda^2=-\alpha^2$, $1+\lambda^2=\beta^2$。替換(2)給出：

$$I=\int\frac{2dt}{\beta^2t^2-\alpha^2}=\frac{1}{\alpha\beta}\ln\left|\frac{\beta t-\alpha}{\beta t+\alpha}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\ln\left|\frac{\beta\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\alpha}{\beta\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\alpha}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{\lambda^4-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\lambda^2+1}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\lambda^2+1}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{\lambda^2-1}}\right|+C.$$

3）如果 $\lambda^2=1$，同一個替換給出：

$$I=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C.$$

我們已經看到，在任何情况下，替換(2)都可以把原函數(1)有理化，因而(1)型的原函數總是初等函數。因此，替換(2)具有很大的原則意義。不過作這個替換常常比較麻煩而且往往可以用更簡單的替換來代替它。可以證明，對於某些相當廣泛的類型的函數，替換 $t=\sin x$，$t=\cos x$ 或 $t=\operatorname{tg} x$ 已經可以把(1)型的原函數有理化。我們現在就來考慮某些這種情形。

1°. 如果 $R(x, y)$ 是關於 y 的奇函數（換句話說當變量 y 換作 $-y$ 時，它剛好只變一個符號），則替換 $\sin x=t$ 就已經可以使原函數(1)有理化。事實上，在這種情形，當我們用 $-\cos x$ 代替 $\cos x$ 時，函數

$$\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \tag{3}$$

完全不變，這就說明 ❶，在這個函數中 $\cos x$ 只以平方出現。但是 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$，所以函數(3)是 $\sin x=t$ 的有理函數。因此，我們有：

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x\,dx=\int R^*(t)dt,$$

這裏 $R^*(t)$ 是 t 的一個有理函數。

2°. 完全平行地可以證明，當函數 $R(x, y)$ 關於 x 是奇函數時，替換 $\cos x=t$ 就可以使原函數有理化。

3°. 最後，如果 $R(x, y)\equiv R(-x, -y)$，則替換 $\operatorname{tg} x=t$ 可以使原函數(1)有理化。事實上，如果我們在表達式 $R(\sin x, \cos x)$ 中把 $\sin x$

---

❶ 這裏我們用了下述代數定理：如果 $R(z)$ 是 z 的有理函數，又 $R(-z)=R(z)$，則 $R(z)$ 是 z^2 的有理函數。證明．我們有 $R(z)=R(-z)=\frac{1}{2}[R(z)+R(-z)]$；如果 $R(z)$ 是一個多項式，上式右端顯然是關於 z^2 的多項式；一般情形，如果 $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，於是

$$R(z)+R(-z)=\frac{P(z)Q(-z)+P(-z)Q(z)}{Q(z)Q(-z)};$$

這個分式的分子分母都是多項式，並且顯然當 z 換作 $-z$ 時都不改變，因此，根據已經證明的多項式部分的結果，它們都是 z^2 的多項式。

全換寫成 $\operatorname{tg} x \cos x$，我們就得到一個關於 $\operatorname{tg} x$ 與 $\cos x$ 的有理函數：

$$R_1(\operatorname{tg} x,\ \cos x) \equiv R(\sin x,\ \cos x),$$

因而

$$R(-\sin x,\ -\cos x) \equiv R_1(\operatorname{tg} x,\ -\cos x).$$

但因爲這兩個恆等式的左端相等，所以

$$R_1(\operatorname{tg} x,\ \cos x) \equiv R_1(\operatorname{tg} x,\ -\cos x),$$

換句話說，R_1 在把 $\cos x$ 換作 $-\cos x$ 時不變，也就是說，它只含有 $\cos x$ 的平方：

$$R_1(\operatorname{tg} x,\ \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x,\ \cos^2 x),$$

因而

$$R(\sin x,\ \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x,\ \cos^2 x).$$

令 $\operatorname{tg} x = t$，我們得到：

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

所以有：

$$I = \int R(\sin x,\ \cos x)dx = \int R_2(\operatorname{tg} x,\ \cos^2 x)dx =$$
$$= \int R_2\left(t,\ \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

原函數的確是有理化了。

例 2. 替換 $\operatorname{tg} x = t$ 給出：

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

下面我們要比較詳細地來敍述原函數 (1) 的一種特殊的但是非常重要的情形，這種原函數形式如下：

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

這裏 m, n 都是整數。顯然，如果 $n = 2k+1$ 是一個奇數，則我們得到上面 1° 的情形，而替換 $\sin x = t$ 立刻使原函數有理化；同樣，如果 m 是奇數，替換 $\cos x = t$ 就使原函數有理化(情形 2°)；最後，如果 m, n 都